Universidade de Brasília
Programa de Pós-Graduação em Metafísica

Dissertação de Mestrado

A demanda por demonstrações de consistência nos fundamentos da matemática

Luiza Silva Porto Ramos

Brasilia 2019

Universidade de Brasília
Programa de Pós-Graduação em Metafísica

A demanda por demonstrações de consistência nos fundamentos da matemática

Luiza Silva Porto Ramos

Dissertação de mestrado apresentada à obtenção do título de mestre em Metafísica ao Programa de Pós-Graduação em Metafísica da Universidade de Brasília.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Freire

Brasilia 2019

Resumo

Este trabalho analisa o tema das demonstrações de consistência e busca elucidar questões relacionadas. Neste percurso pretendemos analisar os limites da consistência, como podemos pensar esta propriedade com o desenvolvimento da lógica matemática e sua relação com a verdade da teoria. Usualmente, a consistência é uma propriedade esperada em toda teoria que se propõe verdadeira. Por outro lado, a partir das formalizações das teorias uma demanda por demonstrações de consistência surge como proposta de validação de sistemas formais. O problema da consistência se coloca no contexto da crise dos fundamentos da matemática e uma resposta para a crise é a busca por rigor através da formalização. Portanto vamos abordar o tema dos sistemas formais, apresentando a noção de redução finitária da matemática. A pedra de toque da teoria dos sistemas formais, os teoremas de Gödel, parecem sugerir duas possibilidades de interpretação: limitam ou esclarecem o conceito de demonstrações de consistência. Finalmente, analisamos três casos de demonstrações: a lógica de primeira ordem, a aritmética de Robinson e a aritmética de Peano. Como resultado deste percurso podemos sugerir uma compreensão dos sistemas formais em que a possibilidade de inconsistência não deve ser eliminada e sim garantida.
Palavras-chaves: Consistência, Teoremas de Gödel, Sistemas Formais, Teorias matemáticas.

Abstract

The present work analyses the subject of consistency proofs and try to elucidate related issues. On this study we pretend to pursuit for the limits of consistency, how we can think this property along the development of mathematical logic and its relation with truth. Usually, consistency is a property expected in all theories that aims to be true. By contrast, with the growth of formalization of theories a pursuit for consistency proofs appear as a bid of validation of formal systems. The consistency problem appear in relation with the crisis of the foundations of mathematics and one reaction for the crisis is the search for rigour by means of formalization. Therefore we shall discuss formal systems, introducing the notion of mathematics finitary reduction. The cornerstone of the theory of formal systems, the Gödel's theorems, seems to suggest two possiblities of interpretation: they restrict or they enlighten the concept of consistency proofs. Finally, we analyze three cases of consistency proofs: first order logic, Robinson's arithmetic and Peano's arithmetic. As a result of this pursuit we can suggest one way to understand formal systems in which the possibility of inconsistency must not be eliminated but guaranteed.
Keywords: Consistency, Gödel's Theorems, Formal Systems, Mathematical Theories.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Rodrigo Freire, pelos inúmeros cursos oferecidos durante o mestrado, pela orientação cuidadosa e dedicação exemplar à formação de jovens pesquisadores; à minha família, por todo o suporte dado sempre que precisei, especialmente à minha irmã, Talita Ramos, sempre companheira e amiga; aos professores Aldo Dinucci, Alexandre Costa-Leite e Edgar Almeida, tanto pelas aulas como pelas contribuições a esta dissertação, e ao programa de pós-graduação em Metafísica da Universidade de Brasília, pela oportunidade e apoio financeiro com uma bolsa de estudos no último ano deste mestrado.

Dedico esta dissertação às minhas avós, fontes de inspiração e força.

Sumário

Introdução **3**

1 Formalização **11**

1.1 Sistemas Formais 12

1.1.1 Exemplos de Teorias Formalizadas 17

1.2 Redução Finitária da Matemática 20

1.2.1 Conservatividade 24

2 Teoremas de Gödel da Incompletude **27**

2.1 Numeração de Gödel e Representabilidade 28

2.1.1 Diagonalização e o Teorema do Ponto Fixo 30

2.2 Os Teoremas 32

2.2.1 Sobreavisos de Interpretação 37

3 Análise de Demonstrações de Consistência **41**

3.1 Um exemplo: A Demonstração da Consistência da Lógica de Primeira Ordem 42

3.2 Considerações Gerais 44

3.3 A Consistência da Aritmética de Primeira Ordem 46

4 Repensando a Concepção Axiomática **52**

Conclusão **59**

Bibliografia **61**

Introdução

No estudo filosófico da matemática não podemos ignorar a importância da história da matemática, uma vez que o próprio objeto de estudo da matemática é constituído historicamente. Diferente de outras disciplinas, como a física e a biologia, que tomam seu objeto de estudo a partir da observação do mundo exterior, a matemática desenvolve seus objetos independente do mundo. Os próprios sistemas axiomáticos formalizados se tornam objeto de estudo no início do século XX, e a questão sobre o papel das demonstrações de consistência nos fundamentos da matemática surge em paralelo à formalização da mesma, contanto que a demanda por demonstrações de consistência se coloca para os mesmos. Assim, nesta introdução buscamos apresentar um breve percurso histórico sobre a formalização dos métodos da matemática e a constituição dos sistemas formais.

Adotamos como referência histórica principal Victor Katz, em [13], e para o histórico da noção de sistema axiomático seguimos Andrés Raggio, em [18]. Convém notar que este percurso não pretende ser exaustivo mas busca contextualizar o problema abordado nesta dissertação acerca do papel fundacional das demonstrações de consistência, pontuando marcos importantes relacionados, uma vez que a matemática percorre um longo e tortuoso percurso até a formalização, como escreve Rózsa Péter:

> Condições exatas não são formuladas prontamente no calor de suas criações. Grandes épocas construtivas normalmente são seguida por épocas críticas; matemáticos olham para a estrada percorrida e tentam chegar no verdadeiro núcleo dos próprios resultados.[1]

O surgimento da matemática nas civilizações antigas está fortemente atrelado ao uso da mesma como ferramenta de explicação dos aspectos práticos e físicos

[1]Tradução nossa do original: *Exact conditions are not readily formulated in the heat of their generation. Great constructive epochs are usually followed by critical epochs; mathematicians look back over the road travelled and try to get at the very kernel of the results themselves* [17, p. 216].

do mundo. Em seu período de nascimento como uma disciplina, a matemática surge como um punhado de técnicas para resolver problemas isolados. Os primeiros registros matemáticos são dedicados às ciências empíricas e envolvem principalmente trabalhos em geografia, economia, engenharia, astronomia e estudos físicos de óptica e mecânica. Estes problemas podem ser divididos entre aritmética, incluindo sistemas de numeração e contagem, e geometria, incluindo sistemas de medidas. Uma característica importante destas duas disciplinas era a justificação dada pela representação concreta, pois os métodos da aritmética eram embasados em algoritmos para calcular e os da geometria em construções de figuras e diagramas particulares.

O desenvolvimento da matemática na Grécia Antiga avança no sentido da abstração; questões internas à matemática surgem conjuntamente com uma mudança nos métodos. A busca por demonstrações a partir de construções gerais, em que o encadeamento de passos deve seguir, com rigor, um padrão previamente instituído, passa a ser a característica predominante. Observamos um direcionamento no sentido da teorização das disciplinas neste período, tanto da aritmética, que levanta novos problemas, em que hoje se colocariam como problemas da teoria dos números e como na filosofia, com o surgimento da lógica. Estas áreas parecem não ter motivação direta com outras ciências empíricas, o que aponta para novas possibilidades de justificação matemática em parte desvinculadas do mundo exterior. Ilustram esta independência a demonstração de Euclides da não existência de um maior número primo e o famoso paradoxo de Epimênides. A geometria permanece como área principal dos estudos matemáticos gregos, avançando como disciplina autônoma; mas também aqui há um movimento de redução do papel das aplicações e de valorização de problemas mais abstratos, tratados com métodos rigorosos.

Ressalta-se neste processo de mudança um direcionamento para a autossuficiência da matemática pura e com isso uma tendência de buscar justificação interna a partir da atenção com a pureza do método. Este caráter do desenvolvimento da matemática não passou despercebido pelos filósofos gregos e nos escritos de Platão encontramos inúmeras discussões sobre o conhecimento matemático, inclusive uma tentativa de estabelecer a matemática como uma disciplina genuinamente racional[2]. Platão ficou conhecido em sua época como um grande defensor da matemática, com

[2]Cf. White, M. J. (n.d.). Plato and Mathematics, em *A Companion to Plato*, Blackwell Publishing, 2006, p. 228 - 243.

uma predileção especial pela geometria, inclusive importantes geômetras passaram pela sua Academia, como Eudoxo. Uma possível explicação deste apreço pela geometria é encontrada na República[3]. Em meio à discussão sobre a educação do filósofo, Sócrates ressalta o aspecto independente da geometria em relação ao mundo e defende o estudo das disciplinas matemáticas como um caminho essencial para o filósofo[4]:

> Se nós vamos fazer a parte naturalmente inteligente da alma útil, ao invés de inútil, vamos estudar astronomia por meio dos problemas, como fazemos geometria, e deixar as coisas no céu sozinhas.[5]

De certa forma em continuidade com as ideias de Platão, que contribuiu para ressaltar o aspecto puro da matemática e sua autonomia teórica, Aristóteles contribui para a formalização da matemática apresentando a concepção axiomática. Segundo [18], Aristóteles circunscreve o conceito de ciência em geral, como um conjunto de enunciados que se dividem entre axiomas e teoremas, sendo que os axiomas devem ser evidentes e suficientes para que se deduzam a partir deles os teoremas da ciência somente pelas regras da lógica[6]. Em conformidade com esta concepção, Euclides publica seu tratado sobre geometria, Os Elementos, que consolidou a concepção axiomática da matemática como referência de rigor e método a ser seguido. De fato, sua sistematização foi largamente adotada por aproximadamente dois mil anos. Apesar de referência como método, encontramos, ao longo dos séculos, objeções quanto à escolha dos axiomas e aos pressupostos implícitos nas demonstrações presente nos Elementos.

No período moderno, novos métodos para a matemática são desenvolvidos para responder a inúmeros problemas, principalmente da geometria e da física, como construir tangentes a uma curva e definir velocidade instantânea de um móvel. As teorias vigentes se mostravam insuficientes para tal tarefa e um grande marco para a matemática é conquistado com a elaboração do cálculo por Leibniz e Newton, em que conceitos novos e mais abstratos são introduzidos, expandindo o alcance da matemática. Como nos diz Stephen Kleene em [14, p.55], "a adição de 'elementos ideais' em um sistema para completar suas estruturas e simplificar a teoria do sistema é um artifí-

[3]Shorey, Paul, tradutor, *Plato Republic*, 2 vols., Cambridge: Loeb Classical Library, 1937.

[4](Cf. R. 527b)

[5]Tradução nossa: *If we're to make the naturally intelligent part of the soul useful instead of useless, let's study astronomy by means of problems, as we do geometry, and leave the things in the sky alone* (R. 530 b6-c1).

[6]Vamos analisar essa concepção adiante nesta introdução

cio comum e frutífero na matemática moderna".[7] No final do período moderno, temos ainda a formulação de novas teorias geométricas, distintas da euclidiana, respondendo às objeções ao axioma das paralelas; e novos desenvolvimentos na álgebra com a teoria de Galois.

Após este longo período construtivo, em que desdobram-se novas teorias e áreas matemáticas, surgem, ao mesmo tempo, novos problemas. Com isto advém um período crítico: insuficiências de rigor neste desdobramento são apontadas e revisões são demandadas. Assim a matemática entra no século XX refletindo sobre o caminho percorrido, e os próprios matemáticos assumem a tarefa de fundamentação da matemática. A figura mais emblemática deste desenvolvimento é David Hilbert, matemático alemão que acabou por se tornar um dos maiores matemáticos do século XX. Um resultado deste processo é a reformulação do método axiomático, com um tratamento formal que constitui uma abordagem mais abstrata.

Esta reformulação é conhecida como formalização dos sistemas axiomáticos e pode ser genericamente caracterizada pela desinterpretação da linguagem matemática, ou seja, pela defesa de um papel não-representacional para a mesma. Um passo importante para a formalização foi o desenvolvimento, com extenso aparato técnico, da lógica matemática pelos seus fundadores Boole, Peirce, Schröder e Frege no século XIX. Outro passo essencial para a formalização foi dado pela concepção axiomática de Hilbert em seu livro Fundamentos da Geometria publicado em 1899, [11]. A revisão do método axiomático combinada com a nova lógica possibilitou o tratamento formal dos sistemas matemáticos, sendo um grande marco nos fundamentos da matemática e delimitando o padrão de rigor para os métodos matemáticos desde então.

Hilbert propõe uma nova fundamentação da geometria, que inclua não só a geometria euclidiana mas também as geometrias não-euclidianas desenvolvidas até o momento, baseada na revisão da concepção axiomática. Para assegurar o rigor de seus sistemas, Hilbert propõe que seja demonstrada a consistência dos mesmos. Ainda, as demonstrações de consistência feitas por Hilbert eram baseadas em interpretações dos conceitos geométricos na análise, portanto observa-se outra característica que distingue a abordagem de Hilbert. Trata-se de uma inversão de papéis entre a geometria e aritmética, em que a segunda é agora considerada mais básica e ponto de partida para

[7]Tradução nossa do original: *the addition of ' ideal statements' to a system to complete its structure and simplify the theory of the system is a common and fruitful device in modern mathematics*

análise da consistência das teorias geométricas. Como ressalta Viero:

> Para os gregos, na base da teoria existiriam certos enunciados cuja a verdade não seria objeto de prova. Segundo a concepção de Hilbert, os axiomas seriam certos tipos de definições para os quais, evidentemente, a questão da verdade se apresentava de uma forma completamente distinta [25, p.55].

Para o matemático alemão, os axiomas não eram verdadeiros *a priori* mas era requerida uma demonstração de consistência para o sistema e tampouco os axiomas garantiam a existência das entidades que se referiam. Portanto, para Hilbert a demonstração de consistência consiste em uma resposta necessária e suficiente para as demandas por verdade e existência de uma teoria matemática. Segundo [14] a ideia de provas de consistência pode ser "rastreada"até Descartes, pois quando este propõe o seu sistema algébrico para a geometria, ele faz uma interpretação de uma teoria na outra, portanto, se uma é consistente, a outra também deve ser. No entanto, a busca intencional por consistência fica evidente somente com o trabalho de Hilbert.

Em direção oposta, outro matemático alemão interessado em fundamentação, Gottlob Frege, acreditava que demonstrações de consistência eram dispensáveis, pois os axiomas deviam ser proposições verdadeiras *a priori* e os conceitos fixados por eles. Frege não aceita a concepção de Hilbert de que os conceitos dados por axiomas poderiam ser desinterpretados e os dois trocam inúmeras cartas discutindo o papel da axiomatização e do formalismo [8]. Muito antes de Hilbert, Frege teve um papel relevante na evolução dos sistemas formais, pois apresentou em 1879 no livro *Begriffsschrift*[9] um sistema axiomático para a lógica de primeira ordem, com um tratamento novo para os conceitos de quantificadores. No entanto, Frege tinha uma visão clássica sobre a concepção axiomática e para ele a verdade dos axiomas da geometria eram garantidos pela intuição. Assim, Hilbert responde a Frege:

> Eu fiquei muito interessado na sua frase: "Da verdade dos axiomas segue-se que eles não contradizem um ao outro"pois durante todo tempo que estive

[8]Cf. [**?**] para uma abordagem original da discussão.

[9]*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle a. S.: Louis Nebert. Tradução: Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic, por S. Bauer-Mengelberg em Jean Van Heijenoort, From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, Harvard University Press, 1967.

pensando, escrevendo e ensinando sobre estas coisas, venho dizendo exatamente o contrário: Se os axiomas, dados arbitrariamente, não contradizem um ao outro, então eles são verdadeiros e as coisas definidas pelos axiomas existem. Este é para mim o critério de verdade e existência.[10]

Neste debate, fica claro que a busca por formalismo na matemática não surge univocamente mas diferentes elementos "foram colocados"a partir de motivações filosóficas muito distintas. Segundo Raggio em [18, p.100], para chegar aos sistemas formais como entendemos hoje, foi preciso romper com os seguintes aspectos que caracterizavam a concepção aristotélica de sistemas axiomáticos:

1. a exigência de homogeneidade ontológica;
2. a exigência de uma evidência e de uma necessidade;
3. o caráter implícito da lógica subjacente;
4. a exigência de finitude.

Da parte de Hilbert podemos ter a contribuição de abandonar tanto a exigência de homegeneidade ontológica, que pode ser entendida hoje como uma fixação da referência dos conceitos primitivos presentes nos axiomas, como a evidência e necessidade dos axiomas. Isto se dá pois na concepção axiomática de Hilbert os conceitos primitivos são substituidos por variáveis, que não têm referência fixada e a escolha dos axiomas passa a ser livre. Mesmo se opondo fortemente a esta concepção, o próprio Frege foi um importante propulsor do formalismo ao apresentar a primeira formalização da lógica de primeira ordem, ressaltando "o caráter implícito da lógica subjacente"citado acima. A exigência de finitude permanece em discussão até hoje.

Convém observar que mesmo que tenha sido uma grande referência para o formalismo, a concepção axiomática da matemática não implica necessariamente em uma visão estritamente formalista da mesma, e o próprio Hilbert parecia ser adepto da visão de que para axiomatizar uma teoria deve haver um entendimento anterior do que seria formalizado; enquanto que um formalista extremo diria que o entendimento se dá

[10]Tradução nossa do original: I was very much interested in your sentence: "From the truth of the axioms it follows that they do not contradict one another"because for as long as I have been thinking, writing, lecturing about these things, I have been saying the exact reverse: If the arbitrarily given axioms do not contradict one another, then they are true, and the things defined by the axioms exist. This for me is the criterion of truth and existence [**?**].

somente no âmbito sintático. Para Frege este era um ponto essencial: uma formalização deveria ser antecipada pelo entendimento da teoria, e o intuito da formalização seria criar uma linguagem mais apropriada para conduzir as investigações matemáticas (cf. [22, p.4-6]).

Finalmente, com sua nova concepção axiomática, Hilbert não exclui da tarefa de fundamentação as questões metamatemáticas, pois, enquanto ele apresenta axiomas e definições para seu sistema, ele também se ocupa de julgar o próprio sistema apresentado. Esta forma com a qual Hilbert lida com os sistemas axiomáticos foi um passo essencial para o estudo dos sistemas formais. Como escreve, Kleene:

> É uma contribuição de Hilbert ter concebido uma nova abordagem direta, e ter reconhecido o que esta envolvia para a axiomatização. Este método direto está implícito no significado de consistência (pelo menos como agora o pensamos), nomeadamente que uma contradição lógica (uma proposição A e sua negação $\neg A$ serem ambas teoremas) não pode surgir da teoria deduzida a partir dos axiomas. Portanto, para demonstrar a consistência de uma teoria diretamente, deve-se demonstrar uma proposição sobre a teoria ela própria, i.e., especificamente sobre todas as possíveis demonstrações de teoremas da teoria. A teoria matemática da qual esperamos demonstrar a consistência torna-se ela própria o objeto de um estudo matemático, o qual Hilbert denominou "metamatemática"ou "teoria da demonstração".[11]

Para demonstrar a consistência de teorias matemáticas é preciso primeiro torná-las objeto de investigação matemática, o que é obtido por meio da formalização e nos leva aos sistemas formais. Além disso, essas demonstrações de consistência são também demonstrações matemáticas, portanto devem ser levadas a cabo dentro de um âmbito matemático, chamado metamatemática. Para efetuar este programa de fundamentação muito deveria ser feito, a começar pela elucidação desta separação entre matemática e metamatemática, que discutiremos no primeiro capítulo. Com o

[11]Tradução nossa do original, *"It is Hilbert's contribution now to have conceived a new direct approach, and to have recognized what it envolves for the axiomatization. This direct method is implicit in the meaning of consistency (at least as we now think of it), namely that no logical contradiction (a proposition A and its negation notA both being theorems) can arise in the theory deduced from the axioms. Thus to prove consistency of a theory directly, one should prove a proposition about the theory itself, i.e. specifically about all possible proofs of theorems in the theory. The mathematical theory whose consistency it is hoped to be proved then becomes itself the object of a mathematical study, which Hilbert calls "metamathematics"or "proof theory"* [14, p.55].

avanço das teorias formalizadas, o programa viveu seu ápice nas primeiras décadas do século XX.

Curiosamente, um ímpeto para o programa de fundamentação foi a derrocada do projeto de Frege, com a descoberta de uma inconsistência no seu sistema, conhecida como paradoxo de Russell. Trata-se de uma contradição derivada a partir dos axiomas do sistema lógico de Frege comunicada ao matemático pelo filósofo Bertrand Russell. Esta contradição é gerada pela consideração da propriedade de não predicar de si mesma aplicada a ela própria. Também os paradoxos da teoria de conjuntos, como a existência do conjunto de todos os conjuntos, entre outros, geraram a crise nos fundamentos da matemática que motivaram o programa. Contudo, este programa acaba bastante enfraquecido pelos resultados de Gödel, apresentados no segundo capítulo desta dissertação. Ainda assim, fazemos uma análise direta sobre a possibilidade de demonstrar consistência no terceiro capítulo e expomos no capítulo final como esta análise ainda têm um papel relevante nos fundamentos da matemática.

Capítulo 1

Formalização

> Aqui é onde a matemática é partida na metade. Em uma metade estão os sistemas formais completos, ao invés de deduções temos regras formais de procedimento; a outra metade é um tipo de super-Matemática, conhecida como metamatemática, que meticulosamente pondera sobre o conteúdo de cada passo e usa somente deduções livres de perigo; de alguma forma examina o sistema formal de cima e seu principal objetivo é a demonstração da ausência de contradição de diferentes áreas de conhecimento.[1]

[1]Tradução nossa do original: *This is where Mathematics is split in half. In one half there are complete formal systems, instead of deductions there are formal rules of procedure; the other half is a kind of super-Mathematics, known as metamathematics, which carefully weighs up the content of every single step and uses only deductions free from danger; it somehow examines the formal system from above, and its principal aim is the demonstration of the freedom from contradiction of different branches of knowledge* [17, p. 244 - 245].

1.1 Sistemas Formais

Sistemas formais participam do contexto de teorias axiomático-dedutivas, considerados como a componente sintática das mesmas. A outra componente seria a semântica, representada pela classe de modelos. Uma teoria axiomática se distingue de outros tipos de teorias principalmente pela atenção à pureza dos métodos permitidos. Ao axiomatizar uma teoria, o matemático restringe àquilo que pode expressar a partir de meios estipulados, como descreve Péter:

> Metodologia clara, em outras palavras a enunciação sem ambiguidade das condições de trabalho, é a razão pela qual matemáticos sempre se entendem tão bem, diferente de pesquisadores em algumas das outras ciências.[2]

Se consideramos que teorias buscam expressar conteúdo sobre um tema específico, no caso da matemática podemos dizer que teorias buscam expressar ideias ou conceitos. Naturalmente, há outras concepções sobre o que é uma teoria matemática, sendo isto uma questão relevante para a filosofia da matemática, mas não trataremos desta discussão aqui. Como uma teoria pode capturar um conceito, se uma formalização de um conceito é fornecida por um sistema formal e se um conceito é representado por uma classe de estruturas estas sim são questões que serão retomadas ao final deste trabalho.

O conceito de sistema formal foi desenvolvido simultaneamente com a lógica matemática, mas não é fácil apontar o momento em que ele foi concretizado pois elementos distintos que hoje são determinantes para um sistema formal surgiram de modo esporádico. A busca por clareza e rigor metodológico das demonstrações conduz a formalização das teorias matemáticas, e historicamente parece se concretizar somente com a publicação do *Principia Mathematica* (PM)[3], como apontado por Kurt Gödel em 1931:

> O desenvolvimento da matemática em direção à uma maior exatidão levou, como é sabido, à formalização de grande parte da mesma, de forma que

[2]Tradução nossa do original: *Clear methodology, in other words the unambiguous statement of conditions of work, is the reason why mathematicians always understand each other so well, unlike workers in some of the other sciences* [17, p.215].

[3]Whitehead, Alfred North; Russell, Bertrand, *Principia mathematica*, 1 ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1910.

> demonstrações podem ser seguidas de acordo com poucas regras mecânicas. Os sistema formais mais abrangentes dados até o momento são, por um lado, o sistema *Principia Mathematica*, e por outro lado, o sistema axiomático para a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.[4]

Para se concretizar o ideal de rigor pela formalização a matemática precisava superar algumas dificuldades. Os passos para formalização consistem em, primeiro, o desenvolvimento de uma linguagem simbólica com o intuito de eliminar ambiguidades e facilitar a compreensão, no sentido em que torna mais sucinta a escrita; e segundo, a desinterpretação dos termos matemáticos, obtida ao expressar as propriedades dos termos matemáticos com axiomas e regras sintáticas de forma exaustiva até que não haja significado algum implícito. Mesmo com teorias axiomáticas bastante maduras no aspecto simbólico como as de Peano[5], para a aritmética, e a de Hilbert para a geometria, até o trabalho de Russell e Whitehead, não havia uma compreensão puramente sintática das frases e dos meios de dedução. Portanto podemos considerar que o conceito de sistema formal se realiza estritamente em PM. Como nos diz Arno Viero quanto às teorias de Hilbert e Peano, "as pretensões de rigor ligadas aos procedimentos demonstrativos permaneciam, em grande parte, infundadas", uma vez que:

> A dificuldade residia, basicamente, na ausência de uma linguagem de natureza formal que fosse adequada para a sistematização das proposições matemáticas e que, ao mesmo tempo, permitisse a execução de procedimentos de natureza estritamente sintática com o consequente esvaziamento semântico dos diversos elementos do discurso, inclusive, de seus componentes lógicos [25, p.80-1].

Para introduzir os sistemas axiomáticos formalizados[6], devemos distinguir a componente sintática de uma teoria da sua componente semântica. Se analisamos os axiomas e teoremas como frases então o estudo destes pode ser conduzido considerando-os como objetos concretos, ou seja, que admitem uma representação finitária. Por esta perspectiva, a teorização pode ser compreendida como manipulação

[4]Tradução nossa a partir do original: *The development of mathematics in the direction of greater exactness has - as is well known - led to large tracts of it becoming formalized, so that proofs can be carried out according to a few mechanical rules. The most comprehensive formal system yet set up are, on the one hand, the system of Principia Mathematica and, on the other, the axiom system for set theory of Zermelo-Fraenkel* [8, p.37].

[5]Peano, Giuseppe, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Turin: Bocca, 1889.

[6]As definições apresentadas aqui têm Shoenfield como referência principal, em [19], capítulo 2.

simbólica. Se, por outro lado, estamos interessados no significado que podemos obter de axiomas e teoremas, então não é claro como considerar teorias como objetos concretos, assim o estudos destas deve ser conduzido considerando-as como objetos não-finitários. No primeiro caso, temos a análise sintática, que nos leva ao estudo de sistemas formais; no segundo, caso temos a análise semântica, que pode nos levar ao estudo de estruturas e interpretações desses sistemas.

Esta distinção é relevante pois enquanto o simbolismo é finito, uma interpretação não precisa ser. Para ser objeto de estudo da metamatemática uma teoria deve ser pensada em termos finitários, além disso pode ser mais frutífero para um certo problema, por exemplo problemas de natureza combinatória, pensar nestes termos. Os termos que restam interpretados devem ser os termos lógicos e as regras de inferência, que devem ser explicitadas também como um sistema formal. Ainda resta o significado gramatical dos termos técnicos, mas como escreve Kleene, "de fato, o ponto em que uma axiomatização formal para é arbitrário"[14, p.60]. Dessa forma podemos então dispensar os significados dos termos e até permitir outras interpretações para um dado sistema formal, ou gerar novas teorias a partir daquela formalização.

As componentes de um sistema formal são a linguagem, os axiomas e as regras de inferência, em que tudo deve ser formulado a partir da linguagem do sistema. Como estamos interessados em frases, a linguagem que utilizamos é determinante sobre o que podemos expressar com nossas frases. Uma linguagem formal deve ser objetiva, clara e evitar ambiguidades, por isso linguagens artificiais sem uma interpretação pré-fixada são escolhidas como base de sistemas formais. Um alfabeto deve ser estipulado para a linguagem e devemos distinguir dentro das expressões nesta linguagem aquelas que afirmam algo. Denominamos como fórmulas estas frases assertivas da linguagem que estipulamos.

Os axiomas do sistema devem ser fórmulas da linguagem e as regras do sistema devem permitir obtermos uma fórmula (conclusão) a partir de outras (premissas). Os teoremas são definidos por indução generalizada: os axiomas são teoremas e se as hipóteses de uma regra são teoremas, então a conclusão deve ser teorema. Os axiomas de uma teoria se dividem entre axiomas lógicos e não-lógicos. Dados estes componentes podemos definir o que é uma dedução em um sistema formal. Uma dedução deve ser uma sequência finita de fórmulas em que cada uma é um axioma ou a conclusão de uma regra aplicada a fórmulas anteriores na sequência. Vamos considerar aqui somente sistemas em que o número de premissas para o uso de cada regra deve ser finito.

Uma outra forma de representar sistemas formais pode ser feita com máquinas de Turing, em que fica claro o aspecto finitista do sistema. Informalmente, uma máquina de Turing é uma máquina que recebe uma entrada e retorna uma saída após uma computação, dada por um algoritmo. Um sistema formal seria composto de duas máquinas, uma para a linguagem, que receberia como entrada uma expressão na linguagem e retornaria como saída se aquela expressão é uma fórmula. Para computar isto bastaria usar a definição de fórmula, que é recursiva, e a finitude da expressão garante que a máquina pára com um resultado. Uma entrada para a segunda máquina seria um par sequência finita de fórmulas e uma fórmula. Com isto, a máquina deve computar se a última é uma dedução a partir da sequência pelo uso de regras de inferência.

Portanto, uma vez formalizada, uma teoria pode ser entendida como um sistema de símbolos, com os quais escrevemos as frases; e uma escolha de frases tomadas como axiomas, com as quais deduzimos outras frases a partir de regras que operam ao nível da sintaxe. Assim, uma dedução é um encadeamento de frases em que o que ocorre em termos de transformação sintática em cada passo é determinado. Muitas perguntas surgem a partir de uma formalização: Estes axiomas capturam um modelo pretendido? Essa axiomatização é completa no sentido que todas as verdades podem ser demonstradas a partir destes axiomas? É possível demonstrar uma contradição a partir destes axiomas? As regras escolhidas são suficientes para a dedução de todas as frases verdadeiras?

Estas perguntas não podem ser respondidas pela própria teoria axiomatizada mas devem ser colocadas numa metateoria, cujo o objeto de estudo passa a ser os sistemas formais. Como discutimos anteriormente, Hilbert é o precursor deste estudo, o qual chamou de metamatemática. Kleene descreve este conceito de forma contundente em seu livro *Introduction to Metamathematics*:

> A metateoria pertence à matemática intuitiva e informal. A metateoria pode ser expressa em linguagem ordinária, com símbolos matemáticos, tais como variáveis metamatemáticas, introduzidas de acordo com a necessidade. As asserções da metateoria devem ser compreendidas. As deduções devem

carregar convicção. Elas precisam proceder a partir de inferências intuitivas, e não, como deduções de uma teoria formal, pela aplicações de regras dadas. Regras foram dadas para formalizar a teoria objeto, mas agora precisamos entender sem estas regras, como aquelas regras funcionam. Uma matemática intuitiva é necessária até para definir a matemática formal.[7]

A metamatemática se ocupa das propriedades dos sistemas formais, e as perguntas acima se referem a diferentes propriedades possíveis que um sistema formal pode ter. Se um sistema formal captura um único modelo, dizemos que ele é categórico (completude descritiva). Se a axiomatização permite deduzir todas as frases verdadeiras dizemos que é completa (completude dedutiva). Se não é possível demonstrar uma contradição a partir dos axiomas e regras dizemos que a teoria é consistente. A última pergunta colocada acima corresponde a um problema sobre a lógica subjacente, e corresponde a completude semântica do sistema lógico.

Outras propriedades de sistemas formais podem ser colocadas pelas questões: O sistema é decidível? Tudo que o sistema deduz é válido? Dada uma frase S da linguagem, é o caso que o sistema demonstra S ou demonstra a negação de S? Estas propriedades são conhecidas como decidibilidade, correção e negação-completude, respectivamente.

Neste trabalho estamos interessados especialmente na propriedade de consistência. Podemos dar várias caracterizações equivalentes para esta propriedade, que está intimamente ligada ao que pode ser deduzido no sistema. Dizemos que uma teoria formalizada é consistente se, e somente se, existe uma fórmula da linguagem que não é teorema, e, equivalentemente, dizemos que é inconsistente se toda fórmula da linguagem é teorema. Shoenfield apresenta uma importante caracterização, dada pelo teorema da redução (Cf. [19, p.42]): Uma teoria é inconsistente se, e somente se, existe uma conjunção de axiomas não-lógicos cuja negação é logicamente válida.

Todas estas caracterizações são finitárias, no entanto, há uma caracterização não-finitária, bastante relevante, tanto do ponto de vista conceitual como do ponto de

[7]Tradução nossa a partir do original: *The metatheory belongs to intuitive and informal mathematics. The metatheory will be expressed in ordinary language, with mathematical symbols, such as metamathematical variables, introduced according to need. The assertions of the metatheory must be understood. The deductions must carry conviction. They must proceed by intuitive inferences, and not, as the deductions in the formal theory, by applications of stated rules. Rules have been stated to formalize the object theory, but now we must understand without rules how those rules work. An intuitive mathematics is necessary even to define the formal mathematics*[14, p.62].

vista técnico, dada pelo teorema da completude de Gödel: uma teoria formalizada é consistente se, e somente se, admite um modelo, ou seja, se, e somente se, há uma estrutura que satisfaz todos os seus axiomas. Este aspecto semântico da consistência retoma a concepção tradicional sobre demonstração de consistência, quando ainda as noções sintáticas e semânticas eram indissociáveis, e as demonstrações eram obtidas pela construção de um modelo da teoria objeto em uma outra teoria, tal que os axiomas da teoria objeto são verdadeiros sob esta interpretação.

1.1.1 Exemplos de Teorias Formalizadas

Considere as seguintes formalizações para as teorias cujos problemas de demonstrar consistência pretendemos analisar. Uma linguagem do nosso sistema consiste no alfabeto mais os termos e fórmulas definidas a partir do alfabeto. O alfabeto é constituído por símbolos para conectivos, quantificadores, predicados e variáveis, além dos parênteses. Os símbolos para predicados e funções possuem aridade, que indica a quantidade de termos que são pedidos como complemento para formar uma expressão significativa.

Os termos são definidos do seguinte modo indutivo: as variáveis individuais e os nomes próprios são termos e, se F é um símbolo de função de aridade n e $t_1, ..., t_n$ são termos, então $F(t_1, ..., t_n)$ é termo. As fórmulas também são definidas indutivamente: se P é um símbolo de predicado de aridade n e t_1, ..., t_n são termos, então $P(t_1, ..., t_n)$ e $t_1 = t_2$ são fórmulas atômicas. Se A e B são fórmulas, então $(A \vee B)$, $(\neg A)$ e $(\exists w A)$, onde w é uma variável qualquer, são fórmulas da nossa linguagem. Eliminamos os parênteses de acordo com convenções usuais. Como primeiro exemplo apresentamos um sistema para a lógica de primeira ordem. Denominamos L a linguagem para a lógica de primeira ordem e L_A a linguagem para nossas teorias aritméticas.

Alfabeto para L:

Conectivos proposicionais: $\vee, \neg$;

Quantificador existencial: $\exists$;

Símbolos para predicados de aridade finita: $P, Q, R, P', Q', R', ...$;

Váriaveis: $x, y, z, x', y', z', ...$;

Nomes próprios: $a, b, c, a', b', c', ...$;

Parênteses: (,).

Lógica de Primeira Ordem sem igualdade

Axiomas:

L1 $\neg A \vee A$ (terceiro excluído)

L2 $\neg A_w[t] \vee \exists w A$ (substituição), em que $A_w[t]$ representa a fórmula obtida pela substituição da variável w pelo termo t em A.

Regras:

$\frac{A}{B \vee A}$; $\frac{A \vee B}{B \vee A}$; $\frac{A \vee A}{A}$; $\frac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C}$; $\frac{\neg A \vee B \quad A \vee C}{B \vee C}$; $\frac{\neg A \vee B}{\neg \exists w A \vee B}$, desde que w não ocorra livre em B.

Chamamos estas regras de expansão, inversão, contração, associatividade à esquerda, corte e introdução do existencial, respectivamente. Apresentamos um sistema conciso quanto aos conectivos para lógica, como dado em [19]. No entanto, podemos definir os conectivos $\rightarrow$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ a partir dos conectivos proposicionais dados e $\forall$ a partir do quantificador existencial, da seguinte forma:

$A \rightarrow B$ abrevia $\neg A \vee B$; $A \wedge B$ abrevia $\neg(\neg A \vee \neg B)$;

$A \leftrightarrow B$ abrevia $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$; e $\forall x A$ abrevia $\neg \exists x \neg A$.

Alfabeto para L_A:

Conectivos proposicionais: $\vee, \neg$,

Quantificador existencial: $\exists$,

Símbolo para o predicado de igualdade: $=$,

Váriaveis: $x, y, z, x', y', z', ...$,

Nome próprio: 0,

Símbolos para as funções aritméticas: $S, +, \cdot$,

Parênteses: $(,)$.

Aritmética de Robinson

Obtemos o sistema Q, conforme Per Lindström em [16], exceto pelo fechamento universal, adicionando aos axiomas da lógica os axiomas da igualdade e os axiomas Q1-Q7 listados abaixo.

Axiomas da Igualdade:

Identidade: $w = w$, em que w é uma variável qualquer;

Igualdade 1: $(w_1 = w'_1) \rightarrow (w_2 = w'_2) \rightarrow (w_1 = w_2) \rightarrow (w'_1 = w'_2)$, em que w_1, w_2, w'_1 e w'_2 são variáveis quaisquer;

Igualdade 2: $(w_1 = w'_1) \rightarrow ... \rightarrow (w_n = w'_n) \rightarrow F(w_1, ..., w_n) = F(w'_1, ..., w'_n)$, sendo F é um símbolo de função qualquer de aridade n, e w_1, ..., w_n e w'_1, ... w'_n variáveis quaisquer.

Axiomas não-lógicos:

Q1 $\forall x \neg(0 = Sx)$ (0 não é sucessor);

Q2 $\forall x \forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$ (A função sucessor é injetora);

Q3 $\forall x(\neg(x = 0) \rightarrow \exists y(x = Sy))$ (Todo número diferente de 0 é sucessor);

Q4 $\forall x x + 0 = x$ (0 é elemento neutro para a soma);

Q5 $\forall x \forall y x + Sy = S(x + y)$ (Equação recursiva para a soma);

Q6 $\forall x x \cdot 0 = 0$ (0 absorve tudo);

Q7 $\forall x \forall y x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$ (Equação recursiva para a multiplicação).

Estes axiomas são escolhidos para garantir a representabilidade de todas as funções recursivas e podem ser equivalentemente formulados sem quantificadores. Para isto, basta acrescentar um símbolo de função para o predecessor para eliminar o quantificador existencial e usar a equivalência garantida pelas regras de generalização e de instanciação para eliminar os quantificadores universais. Os detalhes deste procedimento podem ser encontrados na referência [19].

Aritmética de Peano

Obtemos o sistema P adicionando a Q o seguinte axioma esquema de indução, em que A é uma fórmula qualquer:

$(A(0) \land \forall x(A(x) \rightarrow A(Sx))) \rightarrow \forall x A(x)$.

Deste modo, estes sistemas formais ficam definidos. No entanto, alguns desdobramentos de suas definições serão utilizados sem demonstração nesta dissertação, mas podem ser facilmente encontrados nas referências. Um fato destacado que utilizaremos adiante é o uso da regra de consequência tautológica, derivada do teorema das tautologias. Esta regra nos diz que uma fórmula A pode ser derivada de outras $B_1, ..., B_n$ se $B_1 \rightarrow ... \rightarrow B_n \rightarrow A$ é uma tautologia, ou seja, uma fórmula verdadeira para qualquer atribuição de valor de verdade.[8]

[8]Para mais detalhes veja [19, p.26-27] e [6, p.15].

1.2 Redução Finitária da Matemática

Como vimos na introdução, o avanço da matemática a partir do período moderno desenvolve novos métodos de demonstração. Muitas destes métodos eram consideradas duvidosos, por exemplo, o uso do axioma da escolha na teoria ZF para conjuntos infinitos. Demonstrações a partir destes métodos eram vistas como manipulações não-construtivas de objetos ideais, pois garantiam a existência de um objeto sem evidência de sua construção. Hilbert foi um dos matemáticos da época que desenvolveu e utilizou estes métodos em suas demonstrações e por isso recebeu fortes críticas de matemáticos conservadores com relação ao infinito, como escreve Karen Smith[9],

> Como a teoria de invariantes esteve primariamente preocupada com a computação explícita de bases, a demonstração não construtiva de Hilbert era controversa. Paul Gordon, o grande especialista da teoria de invariantes na época, exclamou, "Isto não é matemática, isto é teologia!". Quando Hilbert refinou suas ideias para produzir um método que poderia (teoricamente) ser usado para computar geradores, Gordan foi forçado a conceder, "Teologia também tem suas vantagens."(...) A abordagem existencial tomada por Hilbert forneceu um sopro poderoso para a algebra computacional, na medida que matemáticos se voltaram para métodos mais abstratos rapidamente. [10]

Como resposta à estas críticas, Hilbert propõe que a teoria de conjuntos seja preservada, apurando seus métodos e evitando paradoxos. Para isto, em um primeiro momento, a teoria de conjuntos deveria ser formalizada, e então, deveria se seguir uma demonstração de consistência do sistema formal assim obtido, fornecendo uma garantia aceitável que a partir das técnicas abstratas jamais seria derivada uma contradição. Uma demonstração de consistência por meio de métodos considerados seguros, como a aritmética, justificaria essa nova matemática e, adicionalmente, serviria de base para uma imagem formalista da verdade matemática. Em seu famoso discurso

[9] Smith, Karen E., [et al.], *An Invitation to Algebraic Geometry*, New York: Springer-Verlag, 2000.

[10] Tradução nossa a partir do original: *"Because invariant theory had been primarily concerned with the explicit computation of bases, Hilbert's nonconstrutive proof was controversial. Paul Gordon, the leading expert in invariant theory at the time, exclaimed, "This is not mathematics, this is theology!"When Hilbert refined his ideas to produce a method that could (theoretically) be used to compute generators, Gordan was forced to concede, "Theology also has its advantages."(...) The existential approach taken by Hilbert dealt a powerful blow to computacional algebra, as mathematicians quickly turn to more abstract methods."*

em defesa do patrimônio matemático constituído, *On the infinite* [10], Hilbert resume seu programa nos seguintes termos:

> 1- Definições frutíferas e métodos dedutivos que tiveram uma esperança de salvamento serão cuidadosamente investigados, nutridos e fortalecidos. Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.
>
> 2- É necessário estabelecer para todas as deduções matemáticas o mesmo grau de certeza das deduções da teoria elementar dos números, onde ninguém duvida e onde contradições e paradoxos só ocorrem devido ao nosso descuido.

Sabemos que o uso de métodos não construtivos no final do século XIX contribuiu para um período profícuo para a matemática refletindo também sobre o florescimento de novas áreas de investigação. Vemos acima o desejo explícito de Hilbert de preservação do patrimônio matemático e de redução finitária da matemática. O segundo ponto é crucial para o problema de caracterização precisa da metamatemática. O âmbito puro para o desenvolvimento do projeto de Hilbert deveria ser equivalente em termos de certeza a essa teoria elementar dos números. A própria concepção da metamatemática como ambiente natural para levar adiante a justificação dos elementos suspeitos do raciocínio matemático impõe estas restrições. Não faria sentido deixar entrar neste âmbito aquilo que se pretende justificar, como coloca Péter:

> O objetivo não pode ser perdido de vista por um momento: nós queremos justificar o uso de elementos transfinitos em um certo ramo do conhecimento e não haveria sentido nesta justificação se os elementos perigosos entrassem na justificação ela própria. Ferramentas devem ser mantidas absolutamente puras, tão pura que o mais raivoso intuicionista não pode prescindir delas.[11]

Contudo, ainda não era claro o que seria a teoria elementar dos números mencionada por Hilbert, nem era claro como podemos separar a parte perigosa dos métodos matemáticos e delimitar um âmbito puro para as desejadas demonstrações

[11] Tradução nossa a partir do original: *The aim must not be lost sight of for one moment: we want to justify the use of transfinite elements in a certain branch of knowledge and there would be no point at all in such a justification if the dangerous elements crept into the justification itself. Tools must be kept absolutely pure, so pure that the most rabid intuitionist cannot take exception to them* [17, p.244].

de consistência. O que seriam os elementos infinitos que queremos evitar, e quais são as formas de raciocínio que pretendemos admitir? Hilbert e seus colaboradores forneceram diversas indicações, mas não uma resposta completamente precisa a esse questionamento. Como há vasta literatura sobre o tema, vamos nos ocupar apenas dos pontos centrais em torno da discussão. Um desses pontos é a distinção entre infinito atual e infinito potencial, que Hilbert aponta também em sua defesa:

> Encontramos o verdadeiro infinito somente quando consideramos a totalidade dos números 1, 2, 3, 4,... como uma unidade completa, ou quando tomamos os pontos de um intervalo como uma totalidade que existe, de uma só vez. Este tipo de infinito é conhecido como infinito atual ou completado [10].

Em oposição, ao considerarmos a sequência 1, 2, 3, 4,... não como uma totalidade completa, mas apenas como extensão, temos o infinito potencial. O infinito atual era o elemento a ser evitado em uma redução finitária. Podemos entender esta distinção potencial/atual não como ocorrendo no escopo dos objetos matemáticos que podem constituir a interpretação de uma teoria, pois um objeto matemático é finito ou simplesmente infinito, mas sim como uma distinção que se aplica às próprias teorias. Encontramos o infinito atual em uma teoria se não é possível interpretar a mesma sem se referir a objetos infinitos.

Se, por outro lado, podemos interpretar a teoria referindo-se a uma quantidade finita de objetos de cada vez apenas, então não encontramos necessariamente o infinito atual, ainda que haja uma infinidade de objetos finitos. A metamatemática como ambiente das demonstrações de consistência deveria ser uma parte da matemática em que não encontramos o infinito atual. Por exemplo, para interpretar a frase $\forall x; x+1 > x$, não precisamos nos referir a totalidade dos números, pois para cada número é possível verificar se o sucessor é maior que ele. Imaginamos nesse caso que os números são apresentados um por vez, enquanto que se nos referimos a totalidade deveríamos apresentar todos de uma única vez. A frase $\forall x; x+1 > x$ pertence à classe das frases chamadas $\forall$-rudimentar, que é bastante importante na redução finitária e representam as frases em que uma relação computável é quantificada universalmente. A negação de uma frase $\forall$-rudimentar é uma frase do tipo $\exists$-rudimentar, e como a negação de uma relação computável é também computável, a classe de frases $\exists$-rudimentar representam as frases em que uma relação computável é quantificada existencialmente. Estas classes também são chamadas de modo mais abreviado, Π_1 para as universais rudimentares e Σ_1 para as existenciais rudimentares.

Mesmo se estabelecemos que devemos fazer referência somente a objetos que admitem uma representação finita, como as frases acima, na metamatemática, isto ainda não resolve o problema sobre quais métodos são admitidos. Para ilustrar a dificuldade, sabemos que a interpretação de enunciados com quantificação existencial não computável exige referência à totalidade das suas instâncias, no sentido que uma afirmação existencial é verdadeira sobre um domínio de objetos se, e somente se, dentre todas as instâncias, uma delas é o caso. Se a intenção é falar de um domínio infinito, como é o caso na teoria elementar dos números, então o raciocínio geral com a quantificação deve ser considerado um método abstrato. Por outro lado, podemos admitir o método da indução finita, tanto seu uso em definições quanto seu uso em demonstrações, no âmbito da metamatemática desde que aplicado a partir de propriedades efetivas que não envolvam elementos ideais.

Esta parte da matemática só pode fazer referência à objetos que admitem uma representação concreta, finita, como números. Além disso, seu método básico é a indução finita. Não são permitidos o uso de regras lógicas gerais sobre quantificadores. As demonstrações aqui devem ter um caráter algorítmico. Por exemplo, demonstrações de existência apenas são admitidas quando acompanhadas de um algoritmo que nos dá a instância apropriada. Contudo, este esclarecimento resolve apenas parte do problema de redução finitária da matemática. Temos o ambiente puro para as demonstrações de consistência, mas estas ainda só são possíveis se as teorias matemáticas admitem representações finitárias, portanto acessíveis para a metamatemática.

Com os sistemas formais alcançamos exatamente isto, pois estes podem ser considerados sistemas simbólicos. A redução obtida com os sistemas formais é baseada na ideia que bastaria representar o uso dos símbolos, e isso pode ser feito por meio de regras de uso que são, também, de natureza simbólica. Qualquer representação de entendimento de outra natureza do simbolismo não seria requerida. A possibilidade dos sistemas formais pode ser vislumbrada observando que o pensamento matemático opera por meio de frases na sua atividade de definir e demonstrar. Definições são determinadas por frases descritivas e demonstrações por encadeamentos de frases.

O caminho para representar de modo puramente simbólico a atividade matemática passaria, então, pela construção de um sistema de frases com a delimitação precisa das suas regras de uso.

Lembramos que o emprego das frases nas deduções do sistema é determinado pela estipulação dos axiomas, ou seja, de quais frases podem ser usadas como premissas, e das regras de inferência, que determinam quais passagens são válidas na atividade dedutiva. Também é necessário saber usar frases descritivas para introduzir novos símbolos a partir dos símbolos inicialmente estipulados. Um símbolo como '$\mathbb{R}$' seria introduzido no nosso sistema que representa a matemática com uma descrição que determina de modo completo, dentro do sistema, o uso do novo símbolo. Note que o significado do símbolo '$\mathbb{R}$' não é parte constituinte desse processo e o infinito não ocorre nessas estipulações.

A lógica de primeira ordem serve de base para uma representação livre de infinitude atual da atividade matemática a partir de seu sistema dedutivo de frases e regras simbólicas. Para que o sistema dedutivo da lógica de primeira ordem desempenhe o papel esperado não é aceitável usar o infinito em lugar algum no processo de constituição do mesmo e tampouco no correspondente processo de redução do raciocínio matemático normal aos procedimentos simbólicos desse veículo formal. Ou seja, constituir o sistema finitariamente é apenas o primeiro passo. Devemos também mostrar que o sistema funciona adotando a mesma restrição metodológica sobre o infinito. Para isso, há que se mostrar que as passagens do raciocínio matemático em geral estão representadas no sistema e ao mesmo tempo que o sistema não é capaz de deduzir frases além da conta, ou seja, que ele é conservativo com relação ao finitário. Essa última propriedade está fortemente ligada à possibilidade de demonstrar construtivamente a consistência do sistema.

1.2.1 Conservatividade

O que seria dizer de um sistema de representação simbólica da matemática que ele não deduz frases além da conta? Uma primeira resposta seria que para a classe das frases do sistema que admitem de modo uniforme um significado finitário há uma demonstração construtiva que se uma frase dessa classe é deduzida no sistema, então seu significado finitário é verdadeiro, caso em que dizemos que o sistema é finitariamente correto com relação à classe. Uma análise nesse sentido é apresentada a seguir, com a demonstração de que se uma teoria com recursos finitários prova a consistência de uma teoria com recursos infinitários então a conservatividade é garantida.

O domínio abstrato seria caracterizado por proposições ideais sem significados, seriam pura manipulação simbólica. E quanto o domínio da matemática concreta? Enunciados concretos seriam proposições finitariamente significativas, por exemplo as proposições com quantificação limitada, como as rudimentares mencionadas acima. Pela regra da generalização vale também o fecho universal dessas fórmulas, que são as frases do tipo $\forall$-rudimentar, por exemplo $\forall x(f(x) = g(x))$, sendo f e g funções recursivas primitivas. Não são considerados concretos a negação destes enunciados, ou seja, enunciados $\exists$ - rudimentar ou Σ_1.

Vamos supor que M é uma imagem formal de parte da matemática, um sistema simbólico tal que parte das passagens do raciocínio matemático estão representadas em M. Sabemos que M é consistente se e somente se há uma frase do sistema que não é dedutível. Outra caracterização da consistência de M é que não há frase A do sistema tal que A é dedutível em M e $\neg A$ também é dedutível em M, pois qualquer frase é consequência tautológica de A e $\neg A$. Para cada frase A, não pode ser que ambas A e $\neg A$ estejam na conta do que é para ser deduzido. De todo modo, fica claro que se M é inconsistente, então M é capaz de deduzir frases além da conta. Isso é importante, mas seria a conversa válida? Será que bastaria que M fosse consistente para garantir que M não é capaz de deduzir o que não é para ser deduzido? A resposta aqui é não. O sistema pode ser consistente e, por exemplo, deduzir uma frase A que é interpretada finitariamente como falsa. A mera consistência de M não basta.

Uma hipótese mais forte que a mera consistência de M é a hipótese que há uma demonstração construtiva da consistência de M. Seria isso ainda insuficiente? A resposta agora depende do que entendemos como aquilo que não é para ser deduzido. Entre as frases de M há a classe daquelas que admitem uniformemente um significado finitário. Agora, qual é essa classe? Vamos estipular, por enquanto, que é a classe das frases $\forall$-rudimentares.[12] Tal estipulação implica que a hipótese acima é suficiente, conforme o teorema abaixo.

Teorema 1. *Suponha que M representa parte suficiente da matemática e que há uma demons-*

[12] Para mais detalhes veja [2, p.263] e [20, p.823].

tração construtiva da consistência de M. Nesse caso, M é finitariamente correto com relação à classe das frases ∀-rudimentares.

Demonstração. A classe das frases ∀-rudimentares é tal que suas frases admitem uniformemente um significado finitário. Se A é uma frase ∀-rudimentar, representamos por $\tilde{A}$ o enunciado finitário correspondente. Seja A uma frase ∀-rudimentar dedutível em M. Então, há uma demonstração construtiva que A é dedutível em M, que consiste em exibir a dedução de A em M. Por outro lado, $\neg A$ é uma frase ∃-rudimentar, e há uma demonstração construtiva que se $\neg A$ não é dedutível em M, então $\tilde{A}$ (pela chamada Σ_1 completude). Pela hipótese do teorema, há uma demonstração construtiva que pelo menos uma entre A e $\neg A$ não é dedutível em M. Portanto, há uma demonstração construtiva de $\tilde{A}$. □

O teorema acima não pode ser ampliado para abarcar a classe das frases ∃-rudimentares, como apresentado em [7] e [2, p.267]. Portanto, uma demonstração construtiva de consistência é suficiente para legitimar o uso de M para demonstrar frases ∀-rudimentares, mas insuficiente para o uso correspondente às ∃-rudimentares. Contudo, há outras consequências interessantes de uma demonstração construtiva de consistência. Uma dessas consequências é que, para demonstrar construtivamente a consistência de um sistema é preciso entender a estrutura fina do funcionamento do sistema. Abordaremos este tópico no último capítulo.

Capítulo 2

Teoremas de Gödel da Incompletude

> Também é uma agradável surpresa descobrir que, ao mesmo tempo, nós resolvemos o problema que vinha atormentando os matemáticos há muito tempo, qual seja, o problema de demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética. Pois, sempre que o método axiomático é utilizado, o problema de demonstrar a consistência se coloca. Claro que ao escolher, entender e usar regras e axiomas nós não queremos nos fiar somente na crença cega.[1]

[1]Tradução nossa do original: *"It is also a pleasant surprise to discover that, at the very same time, we have resolved a problem which has plagued the mathematicians for a long time, viz., the problem of proving the consistency of the axioms of arithmetic. For, wherever the axiomatic method is used, the problem of proving consistency arises. Surely in choosing, understanding, and using rules and axioms we do not want to rely solely on blind faith"* [10].

2.1 Numeração de Gödel e Representabilidade

Vamos apresentar aqui uma ideia simplificada para a numeração de Gödel, diferente da utilizada por ele na sua demonstração. Considere a linguagem L_A mais um símbolo $\uparrow$ para exponenciação. Adicionamos ao sistema aritmético Q os seguintes axiomas de definição recursiva desta operação: $x \uparrow 0 = S0$ e $x \uparrow Sy = (x \uparrow y) \cdot x$. Para a codificação vamos usar a ideia do teorema fundamental da aritmética, segundo a qual é possível atribuir uma fatoração única para cada número.

Uma codificação para o sistema acima pode ser feita da seguinte forma: Para cada símbolo da linguagem atribuímos um número primo; podemos escrever as fórmulas da linguagem a partir da fatoração de primos, onde o expoente de cada primo corresponde a um símbolo. Sequências de fórmulas são definidas da mesma forma, no entanto elas têm como expoente os números resultantes de cada fórmula, e portanto podemos distinguí-las das fórmulas pois os expoentes serão sempre números não primos. Uma dedução se enquadra dentre estas, pois é uma sequência de fórmulas satisfazendo as condições recursivas dadas anteriormente. Considere a seguinte atribuição de números primos:

0	$=$	S	$+$	$\cdot$	$\uparrow$	$\neg$	$\vee$	$\exists$	$($	$)$	x	$\cdots$
1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	$\cdots$

Desta forma podemos codificar fórmulas e deduções do sistema em números, e assim, referimos a estes números dentro do sistema da aritmética como nomes para as fórmulas. Como exemplo, a fórmula $0 = 0$, é codificada por $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$. O número de uma dedução que começasse com esta fórmula, teria como o primeiro termo 2^{90}. Cada número obtido pela codificação é representado dentro do sistema por $S...S0...$, onde a quantidade de ocorrências de S corresponde ao número.

Portanto um numeral do sistema passa a ter duas interpretações, ou papéis, um é o papel habitual de uso e o outro seria o papel de nomear fórmulas e deduções. Se interpretado da segunda maneira, após a decodificação podemos obter um enunciado da metamatemática. No entanto, para que isto funcione precisamos garantir que de fato as funções e predicados metamatemáticos relevantes do sistema sejam representados no sistema. Como ressalta Kleene, ao tratar os sistemas formais na metamatemática os símbolos passam a ser considerados objetos matemáticos que, apesar de admitirem uma representação concreta, não devem ser confundidos com meras marcas no papel.

> Partindo da concepção de sistemas formais em termos de símbolos formais, tratados como se fossem marcas no papel, para um sistema abstrato de objetos, nossa metamatemática se torna um ramo da teoria dos números pura inteiramente no mesmo nível conceitual que a aritmética dos números naturais e disciplinas matemáticas similares.[2]

A ideia que enunciados da metamatemática podem ser traduzidos para a aritmética, conhecida como aritmetização da metamatemática, foi apresentada por Gödel na demonstração do teorema da incompletude. A aritmetização da metamatemática consiste em mostrar que predicados sintáticos básicos para a definição de um sistema formal podem ser definidos como predicados aritméticos computáveis. Gödel mostrou que funções e predicados computáveis podem ser expressos e computados no sistema aritmético apropriado, ou seja, são representáveis no sistema. Resumindo, todo enunciado metamatemático sobre o sistema que pode ser decidido, pode ser decidido no próprio sistema, uma vez que ele pode ser escrito no sistema pela numeração de Gödel e o sistema contém os recursos de cálculo requeridos para os métodos de decisão.

Intuitivamente, podemos esboçar o caminho para a aritmetização: primeiro, as funções (constante) zero, sucessor, soma, produto e o predicado de igualdade são computáveis, no sentido que dados argumentos para estas funções e predicado, uma máquina é capaz de calcular o valor das funções e o valor de verdade do predicado. A partir de funções básicas computáveis podemos definir novas funções recursivamente e estas também devem ser computáveis, como a exponenciação. Segundo, vários dos predicados da metamatemática, tais como ser fórmula, ser axioma, ser uma dedução podem ser definidos recursivamente como predicados aritméticos, a partir de operações aritméticas computáveis.

Como exemplo, vamos verificar o que deve ser satisfeito para que um predicado expressa "d é uma dedução de A", ou seja, $P(d, A)$, possa ser representado na

[2]Tradução nossa do original: *By going over from the conception of the formal system in terms of formal symbols, treated as if they were marks on paper, to an abstract system of objects, our metamathematics becomes a branch of pure number theory entirely on a par conceptually with the arithmetic of the natural numbers and similar mathematical disciplines*[14, p.251].

aritmética. Primeiro, d deve ser uma sequência de fórmulas e A a última fórmula desta sequência. Se A é uma fórmula, então $\ulcorner A \urcorner$ representa seu número de Gödel associado. Para verificar que cada fórmula da sequência d corresponde a um passo de uma dedução de A basta verificar se as fórmulas ocorrendo na sequência são instâncias de axiomas ou inferidas a partir de fórmulas anteriores segundo as regras do sistema. Intuitivamente podemos ver que tal procedimento é computável, portanto recursivo.

Assim, dizemos que o predicado é representável em Q se, e somente se, existe uma fórmula de Q com duas variáveis livres, x e y, tal que (i) se $P(d, A)$ então Q deduz a fórmula com o número que codifica d e número que codifica A substituindo as variáveis x e y; denotamos tal fórmula como $\phi(\ulcorner d \urcorner, \ulcorner A \urcorner)$. (ii) Se não é o caso que $P(d, A)$, ou seja, se não é o caso que d é uma dedução de A, então Q deduz $\neg\phi(\ulcorner d \urcorner, \ulcorner A \urcorner)$.

Outro predicado importante é a propriedade ser teorema de Q. Dizemos que uma fórmula A é teorema de Q, se existe uma dedução d de A. Como vimos acima, o predicado de dedução é representado por uma fórmula $\phi(x, y)$, portanto temos que se A é um teorema de Q então Q deduz $\phi(\ulcorner d \urcorner, \ulcorner A \urcorner)$ para alguma dedução d. Pelo axioma da substituição e pela regra derivada de *modus ponens*, concluímos que Q deduz $\exists x; \phi(x, \ulcorner A \urcorner)$. Contudo, se A não é teorema, não podemos garantir que Q deduz $\neg\exists x; \phi(x, \ulcorner A \urcorner)$. De fato, veremos que a frase de Gödel é um contra-exemplo para isto. Mais ainda, que o predicado "ser teorema de Q" não é representável, portanto não é recursivo. Nesse caso, dizemos que a teoria é indecidível.

2.1.1 Diagonalização e o Teorema do Ponto Fixo

Continuamos utilizando a teoria Q nesta seção para ilustrar os resultados, contudo, é possível generalizar estes resultados para outras teorias que contém Q. Considere uma numeração de Gödel como a dada acima. A ideia da diagonalização está implícita na demonstração de Gödel e consiste em substituir a variável livre de uma fórmula pelo número de Gödel da própria fórmula. Assim, se $A(x)$ é uma fórmula, dizemos que a fórmula $A(\ulcorner A \urcorner)$ é a diagonalização de A. Como a diagonalização de A é uma fórmula, a ela está associado um número denotado por $\ulcorner A(\ulcorner A \urcorner) \urcorner$.

Dizemos que a fórmula $D(z', z)$ representa em Q a diagonalização de A se, e somente se, Q deduz $\forall z D(\ulcorner A \urcorner, z) \leftrightarrow z = \ulcorner A(\ulcorner A \urcorner) \urcorner$, para qualquer fórmula A. A diagonalização de A é dedutivamente equivalente à fórmula $\exists x(x = \ulcorner A \urcorner \wedge A)$. Em

[2, p.271, p.282], podemos encontrar demonstrações de que toda função recursiva é representável em Q e de que a diagonalização apresentada por ele é uma função recursiva, respectivamente. Nossa definição também é recursiva, pois basta computar o número de Gödel de A e substituir x por esse número em A. Chamamos de ponto fixo para uma fórmula a frase cuja a equivalência com a sua diagonalização é dedutível no sistema.

Teorema 2. [Teorema do Ponto Fixo]

Sejam $C(y)$ uma fórmula e y a única variável livre que ocorre em C. Suponha que há uma fórmula D tal que $D(x, y)$ representa em Q a diagonalização. Então existe uma frase β tal que a equivalência $C(\ulcorner\beta\urcorner) \leftrightarrow \beta$ é dedutível a partir de Q.

Demonstração. Nas condições do enunciado, seja A a fórmula $\exists y(D(x, y) \wedge C)$.

Vamos definir β como sendo a diagonalização de A. Como uma única variável livre ocorre em A, a diagonalização de A é uma frase. Assim, por definição temos $\beta \leftrightarrow \exists y(D(\ulcorner A\urcorner, y) \wedge C)$. Como D representa a diagonalização em Q, temos que $y = \ulcorner A(\ulcorner A\urcorner)\urcorner \leftrightarrow D(\ulcorner A\urcorner, y)$ é dedutível em Q.

Substituindo β temos $y = \ulcorner\beta\urcorner \leftrightarrow D(\ulcorner A\urcorner, y)$. Portanto, substituindo $D(\ulcorner A\urcorner, y)$ na definição de β, temos $\beta \leftrightarrow \exists y(y = \ulcorner\beta\urcorner \wedge C)$. Como $C(\ulcorner\beta\urcorner) \leftrightarrow \exists y(y = \ulcorner\beta\urcorner \wedge C)$, então por equivalência $C(\ulcorner\beta\urcorner) \leftrightarrow \beta$.

Portanto β é um ponto fixo para C. □

Teorema 3. [Teorema de Tarski]

A propriedade "ser teorema" não é representável em Q, desde que Q seja consistente.

Demonstração. Suponha que existe uma fórmula $V(y)$ que representa a propriedade ser teorema em Q. Considere a frase β tal que β é ponto fixo de $\neg V(y)$. Pelo teorema do ponto fixo β existe e $Q \vdash \beta \leftrightarrow \neg V(\ulcorner\beta\urcorner)$. Tal frase terá que ser teorema de Q.

Contudo, se $Q \vdash \beta$, então, pela hipótese que $V(y)$ representa os teoremas, temos que $Q \vdash V(\ulcorner\beta\urcorner)$. No entanto, pela equivalência acima temos que $Q \vdash \neg V(\ulcorner\beta\urcorner)$. Logo, Q é inconsistente.

Se $Q \nvdash \beta$, então, pela hipótese, $Q \vdash \neg V(\ulcorner\beta\urcorner)$. Contudo, pela equivalência acima temos que $Q \vdash \beta$. Então, por hipótese, $Q \vdash V(\ulcorner\beta\urcorner)$. Logo, Q é inconsistente.

Logo, se Q é consistente, não existe uma fórmula $V(y)$ que representa a propriedade ser teorema em Q. □

Este resultado confirma que, de fato, a propriedade ser teorema não é recursiva e, portanto, Q é indecidível. Ou seja, o conjunto de frases derivadas em Q não é recursivo.

2.2 Os Teoremas

Os teoremas da incompletude do matemático austríaco Kurt Gödel, apresentados em [8], constituem o principal resultado da teoria dos sistemas formais e um dos teoremas matemáticos mais relevantes do século XX. Há diversas razões para isso, uma razão evidente é que eles respondem negativamente ao programa de Hilbert. Não só ao programa mas também à concepção formalista da matemática, que estava em ascensão naquele período. O otimismo de Hilbert em sua palestra *On the infinite* se mostra não justificado sob a luz dos teoremas de Gödel. Entretanto há outros motivos que consolidam a importância dos teoremas, uma vez que estes nortearam os avanços da lógica e matemática posterior, gerando novas áreas como a teoria da recursão ou da computabilidade, que continuam frutíferas até hoje.

O primeiro teorema da incompletude apresenta uma frase dada em uma certa linguagem que deve ser verdadeira mas não demonstrável em um sistema formal específico para alguma teoria matemática, por exemplo Q. Um primeiro significado relevante disto é que não é possível obter uma axiomatização completa daquela teoria. Além disso, tal frase é uma evidência que não podemos identificar verdade com aquilo que é demonstrável. Como escreve o lógico Jaakko Hintikka:

> O resultado de Gödel deveria ter sido tomado como uma declaração implícita da independência da teoria de modelos, no que mostrou que a noção modelo-teórica de verdade aritmética não é exaurida pela noção demonstração-teórica de dedutibilidade formal. Gödel ele próprio enfatiza a distinção entre verdade e dedutibilidade.[3]

Gödel obtém este resultado construindo uma frase auto-referente com a propriedade desejada, e intuitivamente podemos enunciá-la como: "não sou demonstrável

[3]Tradução nossa do original: *Gödel's result ought to have been taken a virtual declaration of independence of model theory, in that it showed that the model-theoretical notion of arithmetical truth is not exhausted by the proof-theoretical notion of formal provability. Gödel himself emphasized the distinction between truth and provability*[12, p.39].

na teoria". De fato, se esta frase fosse demonstrada na teoria então o que ela expressa é falso, e portanto a teoria demonstraria uma falsidade. Entretanto é razoável assumir que a nossa teoria preserva verdade e que os axiomas são verdadeiros, assim tudo que nossa teoria deduz é verdadeiro. Convém observar que ao assumirmos que a teoria deduz somente verdades estamos assumindo a correção que implica a consistência. Logo, esta frase não pode ser demonstrada. Mas se ela não pode ser demonstrada na teoria então o que ela expressa é verdade, e portanto há uma frase verdadeira não demonstrável na teoria. Como a negação da frase deve ser falsa, a teoria também não demonstra sua negação. Denomina-se independente uma frase tal que ela não é demonstrável e também sua negação não é demonstrável.

Esta demonstração informal nos permite entender a ideia de Gödel, mas para entender a demonstração é preciso repassar vários pontos. Primeiro, estamos interessados em teorias matemáticas formalizadas cujas frases são sobre números; no entanto, a frase acima expressa uma propriedade metateórica de uma frase, a propriedade de não ser demonstrável. Para superar isso, Gödel mostrou que é possível atribuir um nome dentro do sistema para cada fórmula do próprio sistema, ou seja, a numeração de Gödel que apresentamos anteriormente. Além disso, é preciso definir a relação metateórica de dedução dentro do sistema, ou seja, a relação deve ser representável. Por último, é preciso mostrar que existe uma frase que é equivalente à predicação da não-dedução de si, o que pode ser obtido pelo teorema do ponto fixo.

A partir do teorema de Tarski, podemos demonstrar o teorema com a hipótese mais fraca de que a teoria é consistente. Gödel mostrou que a aritmética com indução, ou seja, a teoria P definida no capítulo 1, satisfaz as condições para a demonstração, assim o teorema se aplica a toda teoria que contém uma aritmética com poder dedutivo equivalente a esta. Para o primeiro teorema, basta que o sistema contenha a teoria Q.

Teorema 4. Primeiro Teorema da Incompletude [Gödel]

Qualquer sistema formal contendo Q ou é consistente ou é negação-completo.

Demonstração. Seja T um sistema formal contendo Q e $P(p, x)$ um predicado que representa a relação p é uma dedução de x em T. Seja β um ponto fixo para a fórmula $\neg\exists p; P(p, x)$. Note que β expressa "eu não sou demonstrável em T". Pelo teorema do ponto fixo, temos que

$T \vdash \beta \leftrightarrow \neg\exists p; P(p, \ulcorner\beta\urcorner)$

Suponha que $T \vdash \beta$. Então $T \vdash \exists p; P(p, \ulcorner\beta\urcorner)$. Pela equivalência acima $T \vdash \neg\beta$ e T é inconsistente. Portanto, se T é consistente, então T não deduz β. Mas isso significa que se T é consistente então β é verdadeira.

Se T deduz $\neg\beta$ então T deduz uma falsidade. Finalmente, concluímos que se T não deduz falsidades então é consistente e negação incompleta. □

Entendemos que uma teoria T é negação-completa se, e somente se, para toda frase A da linguagem L de T, $T \vdash A$ ou $T \vdash \neg A$. Logo, para uma teoria deste tipo, podemos dar um método de decisão, do seguinte modo: dado uma frase qualquer basta buscar uma dedução dela e simultaneamente buscar uma dedução da sua negação; somente uma delas deve ser encontrada se o sistema for consistente, e a busca se encerra. A frase encontrada é teorema e a outra não. Portanto temos um método de decisão para as frases de T e a propriedade de uma frase ser teorema é computável. Assim, podemos demonstrar o primeiro teorema de Gödel utilizando o teorema de Tarski.

Demonstração. Se Q é negação-completa, então Q é decidível. Mas, pelo teorema de Tarski, Q não é decidível. Logo Q não é negação-completa. □

O segundo teorema de Gödel pode ser obtido a partir da formalização da demonstração do primeiro teorema dentro do sistema, e para isto é preciso que o sistema tenha indução. Por isso, no caso do segundo teorema precisamos de uma teoria mais forte que Q, no entanto, como basta adicionar um axioma-esquema para indução, P é suficiente. Esta demonstração foi somente esboçada por Gödel em seu artigo [8], e aqui vamos apresentar uma demonstração que passa pelo teorema de Löb. Esta demonstração é interessante pois apresenta as condições gerais que uma fórmula de demonstrabilidade deve satisfazer para que o enunciado de consistência correspondente não seja demonstrável no sistema. Como aparece em [2, p.296], trata-se de uma forma abstrata do segundo teorema da incompletude de Gödel:

> Os sucessores de Gödel, começando com Paul Bernays, analisaram exatamente quais propriedades de Dem_T [a fórmula tradicional de demonstrabilidade para T] são, de fato, essenciais para obter o segundo teorema de incompletude.

Seja T um sistema formal e $B(x)$ uma fórmula em T, dizemos que $B(x)$ é uma fórmula de demonstrabilidade para T se e somente se satisfaz as seguintes condições de Löb:

1. Se $T \vdash \alpha$ então $T \vdash B(\ulcorner \alpha \urcorner)$

2. $T \vdash B(\ulcorner \alpha \to \beta \urcorner) \to (B(\ulcorner \alpha \urcorner) \to B(\ulcorner \beta \urcorner))$

3. $T \vdash B(\ulcorner \alpha \urcorner) \to B(\ulcorner B(\ulcorner \alpha \urcorner) \urcorner)$,

quaisquer que sejam as frases α e β de T. Se T contém P então a fórmula usual de demonstrabilidade satisfaz as condições acima.

Teorema 5. Teorema de Löb

Para qualquer frase α em T e a fórmula de demonstrabilidade $B(x)$ em T, se $T \vdash B(\ulcorner \alpha \urcorner) \to \alpha$ então $T \vdash \alpha$.

Demonstração. Suponha que $T \vdash B(\ulcorner \alpha \urcorner) \to \alpha$ para uma frase α qualquer. Considere a frase que expressa "se sou demonstrável então α". Pelo teorema do ponto fixo, temos uma frase θ tal que $T \vdash (B(\ulcorner \theta \urcorner) \to \alpha) \leftrightarrow \theta$. De fato, θ é a frase que consideramos anteriormente.

Tomando a volta desta equivalência, temos $T \vdash \theta \to (B(\ulcorner \theta \urcorner) \to \alpha)$. Pela condição 1 é o caso que $T \vdash B(\ulcorner \theta \to (B(\ulcorner \theta \urcorner) \to \alpha) \urcorner)$. E pela condição 2, temos $T \vdash B(\ulcorner \theta \to (B(\ulcorner \theta \urcorner) \to \alpha) \urcorner) \to (B(\ulcorner \theta \urcorner) \to B(\ulcorner B(\ulcorner \theta \urcorner) \to \alpha \urcorner))$.

Por consequência tautológica, temos $T \vdash B(\ulcorner \theta \urcorner) \to B(\ulcorner B(\ulcorner \theta \urcorner) \to \alpha \urcorner)$. Pela condição 2, $T \vdash B(\ulcorner B(\ulcorner \theta \urcorner) \to \alpha \urcorner) \to (B(\ulcorner B(\ulcorner \theta \urcorner) \urcorner) \to B(\ulcorner \alpha \urcorner))$. Portanto temos que $T \vdash B(\ulcorner \theta \urcorner) \to (B(\ulcorner B(\ulcorner \theta \urcorner) \urcorner) \to B(\ulcorner \alpha \urcorner))$, por consequência tautológica.

Pela condição 3, temos que $T \vdash B(\ulcorner \theta \urcorner) \to B(\ulcorner B(\ulcorner \theta \urcorner) \urcorner)$. Por consequência tautológica $T \vdash B(\ulcorner \theta \urcorner) \to B(\ulcorner \alpha \urcorner)$. Utilizando a nossa suposição inicial deduzimos que $T \vdash B(\ulcorner \theta \urcorner) \to \alpha$. Logo, $T \vdash \theta$ e, pela condição 1, $T \vdash B(\ulcorner \theta \urcorner)$. Portanto, por consequência tautológica temos que $T \vdash \alpha$. $\square$

Com este resultado podemos demonstrar que um sistema formal consistente e com aparato suficiente para definir uma fórmula de demonstrabilidade, como a aritmética com indução, não é capaz de demonstrar o enunciado de consistência para esse predicado. É claro que podemos definir o enunciado de consistência a partir de uma fórmula de demonstrabilidade simplesmente afirmando a não demonstrabilidade de uma contradição. Uma frase de consistência é uma frase Π_1, uma vez que expressa a negação de um existencial quantificado sobre uma fórmula, apenas com quantificadores limitados, que representa um predicado recursivo.

Teorema 6. Segundo Teorema da Incompletude [Gödel]
Seja T um sistema formal consistente e $B(x)$ uma fórmula de demonstrabilidade para T. Então T não demonstra $\neg B(\ulcorner \perp \urcorner)$.

Demonstração. Suponha que $T \vdash \neg B(\ulcorner \perp \urcorner)$. Mas por consequência tautológica temos que $T \vdash B(\ulcorner \perp \urcorner) \rightarrow \perp$. Pelo teorema de Löb, $T \vdash \perp$ e portanto é inconsistente. Por contraposição, temos que se T é consistente nossa suposição é falsa. □

Uma consequência imediata deste resultado é que há uma limitação para demonstrações de consistência de teorias que contém pelo menos Q. Nesses casos, uma demonstração de consistência é sempre relativa a outra teoria que não pode ser mais fraca ou equivalente. No entanto, como escreve Gödel quando publicou os teoremas, esta limitação não significa que não seja possível demonstrar a consistência construtivamente com uma teoria que assuma pouco mais que a original:

> Deve ser expressamente notado que a Proposição XI [teorema 6] não representa contradição com o ponto de vista formalista de Hilbert. Pois este ponto de vista pressupõe somente a existência de uma demonstração de consistência efetivada por meios finitos, e pode ser concebível que haja demonstrações finitárias que **não podem** ser enunciadas em P.[4]

Mesmo que Gödel tenha mudado de ideia eventualmente e que haja um certo consenso sobre a noção de finitário como sendo a aritmética recursiva primitiva (Cf. [23]), há propostas que seguem a linha compatibilista expressa acima, como discutiremos adiante. Ainda, a noção de finitário poderia abarcar mais coisas, como Hintikka defende em [12], e a lógica subjacente também pode ser mais forte que a lógica de primeira ordem.

Muitas outras questões relevantes sobre consistência de teorias, e sua relação com verdade surgem a partir dos teoremas de Gödel. Por exemplo, a própria frase

[4]Tradução nossa do original: *It must be expressly noted that Proposition XI represent no contradiction of the formalistic standpoint of Hilbert. For this standpoint presupposes only the existence of a consistency proof effected by finite means, and there might conceivably be finitary proofs which **cannot** be stated in P*[8, p.71].

da consistência passa a ser uma frase verdadeira e indemonstrável no sistema, se este é consistente. Ou seja, se supomos que P é consistente, então a teoria P com o axioma adicional $B(\ulcorner \perp \urcorner)$ deve ser consistente, pois esta frase é independente de P, e, no entanto, é uma teoria falsa. Isto nos daria um indício de afastamento entre consistência e verdade das teorias matemáticas. No entanto, o teorema da completude de Gödel parece implicar uma relação entre verdade e consistência, pois afirma que uma teoria é consistente se, e somente se, tem modelo. Mas sabemos que este modelo pode não ser aquele intencionado ou *standard*, o que não nos diz muito sobre a verdade da teoria. E tampouco podemos pressupor que a consistência implica na existência de um modelo em qualquer contexto, como queria Hilbert, pois podemos obter um contra-exemplo, utilizando a aritmética de segunda ordem, de uma teoria consistente que não possui modelo.

Não obstante estes resultados negativos e voltando ao nosso tema, acreditamos que é possível ter um ganho de entendimento sobre a semântica de teorias através de um estudo positivo das demonstrações construtivas de consistência. No capítulo seguinte apresentamos algumas etapas comuns que devem ser seguidas em demonstrações de consistência, tanto finitárias como infinitárias, mas que podem ser já apresentadas: Estabelecer uma noção similar à verdade, uma correção da teoria segundo esta noção e, por último, mostrar que há alguma fórmula dentro deste escopo de correção mas para a qual a noção similar à verdade estabelecida não se aplica. Portanto, qualquer demonstração de consistência tem uma noção similar à verdade pressuposta e ao concretizar estas etapas ganha-se maior entendimento sobre a semântica da teoria.

Este ponto será expandido em detalhes no capítulo seguinte. Antes, gostaríamos de analisar alguns pontos relevantes sobre interpretações possíveis e enganosas do segundo teorema de Gödel, o que irá contribuir para a compreensão do problema de demonstração de consistência.

2.2.1 Sobreavisos de Interpretação

O primeiro cuidado que devemos ter é quanto a diferença entre afirmar que um sistema não demonstra sua consistência e que o mesmo sistema não deduz a frase de consistência em consideração. A confusão destas duas afirmações leva a uma interpretação enganosa, e é baseada na redução da consistência do sistema àquilo que é expresso por uma frase do sistema. Este engano pode ser evitado se consideramos a seguinte explicação com base na não-representabilidade dos teoremas do sistema.

Afirmar que um sistema é consistente é afirmar que uma contradição como $A \wedge \neg A$ (representada de agora em diante pelo símbolo de absurdo $\perp$) não é teorema deste sistema. Enquanto que afirmar a frase da consistência do sistema é afirmar a fórmula $\neg B(\ulcorner \perp \urcorner)$, sendo B uma fórmula de demonstrabilidade mas que *não* representa os teoremas do sistema. Lembramos que para uma fórmula $V(x)$ representar os teoremas de um sistema T no próprio sistema, ela deve satisfazer as seguintes condições:

$$\text{Se } T \vdash A \text{ então } T \vdash V(\ulcorner A \urcorner) \text{ e}$$
$$\text{se } T \nvdash A \text{ então } T \vdash \neg V(\ulcorner A \urcorner).$$

Já a fórmula de demonstrabilidade $B(x)$ é apenas uma fórmula que satisfaz as três condições de Löb formuladas acima. De fato, temos que a primeira condição de Löb nos dá que se $T \vdash A$ então $T \vdash B(\ulcorner A \urcorner)$, como na primeira condição de representabilidade. Contudo, a segunda condição de representabilidade não é satisfeita, se o sistema for consistente, e sabemos, pelo teorema de Tarski, que não existe uma fórmula do sistema que satisfaz as duas condições. Por isso, dizemos que o predicado "ser teorema" não é representável.

Para apreciar a diferença, considere que a frase de consistência do sistema é demonstrável, isto é, $T \vdash \neg B(\ulcorner \perp \urcorner)$. Disso, não podemos concluir que T é consistente, pois, se T é inconsistente, então T deduz tudo, inclusive a frase da consistência. Por outro lado, considere que T é consistente. Pelo teorema de Gödel, $T \nvdash \neg B(\ulcorner \perp \urcorner)$. Ou seja, afirmar a frase da consistência no sistema não implica a consistência do mesmo e, vice-versa, afirmar a consistência do sistema não implica afirmar a frase da consistência no sistema. Sob este prisma, podemos reinterpretar o teorema de Gödel como evidenciando a distinção entre essas duas afirmações e, por consequência, que o sistema é incapaz de *expressar* sua consistência. Esta interpretação foi notada pelo lógico-matemático Bruno Poizat, em seu livro *Cours de Théorie des Modèles*[5]:

> Entretanto a frase "a consistência da Aritmética não é demonstrável na Aritmética"não tem sentido algum, pois, segundo o teorema de Tarski, a

[5]Poizat, Bruno, *Cours de Théorie des Modèles*, Paris: OFFILIB, 1985.

consistência da Aritmética não corresponde a nenhuma frase da linguagem da Aritmética.[6]

Insistindo neste ponto, podemos averiguar o que resulta se tentássemos esclarecer o que significa expressar a consistência no sistema. Seguindo as definições usuais, faria sentido estipular que uma frase γ expressa a consistência de T em T se:

Se T é consistente, então $T \vdash \gamma$ e
se T é inconsistente então $T \vdash \neg\gamma$.

Claramente, esta estipulação é vazia, pois qualquer teorema de T satisfaz as condições de uma tal γ. Se, por outro lado, mudássemos a segunda condição para: se T é inconsistente então $T \nvdash \gamma$, a estipulação resultaria igualmente inócua pois nenhuma frase satisfaz isto. Assim, reafirmamos a conclusão de Poizat que não há frase no sistema que expressa a consistência do sistema.

O segundo cuidado de interpretação que gostaríamos de ressaltar é derivado de um resultado, devido a Feferman, mas que pode ser encontrado em [16, p.33], teorema 7. Como não há uma fórmula que representa a demonstrabilidade, as fórmulas $B(x)$ consideradas nas demonstrações acima não esgotam as possibilidades de tentar expressar a propriedade de demonstrabilidade. De fato, é possível considerar uma outra fórmula para demonstrabilidade, se modificamos a fórmula que representa a propriedade de ser axioma e, por conseguinte, a fórmula que representa a relação de dedução será diferente da usual.

Considere a fórmula usual $A(x)$ que representa os axiomas de P em P, e $CON(P)$ a frase usual da consistência. Por $CON(P|x)$ denotamos a frase da consistência de $P|x$, que é a subteoria de P cujos os axiomas tem número de Gödel menor que x. Modificamos $A(x)$ do seguinte modo, $A^*(x)$ é $A(x) \wedge CON(P|x)$. A ideia para $A^*(x)$ é que x é um código de um axioma no sentido modificado se, e somente se, é um código de axioma no sentido usual e a subteoria $P|x$ é consistente, ou seja, nenhuma contradição é derivada usando apenas axiomas com código menor que x. Acontece que a fórmula $A^*(x)$ também representa os axiomas de P.

De fato, se α é axioma, então $P \vdash A(\ulcorner\alpha\urcorner)$. Para verificar que $P \vdash A^*(\ulcorner\alpha\urcorner)$ resta mostrar que $P \vdash CON(P|\ulcorner\alpha\urcorner)$. Isto é o caso pois P demonstra a consistência de todas

[6]Tradução nossa do original: *mais la phrase "la consistence de l'Arithmétique n'est pas prouvable dans l'Arithmétique"n'a aucun sens, puisque, d'après le théorème de Tarski, la consistance de l'Arithmétique ne correspond à aucun énoncé du language da Arithmétique*, [p.200].

suas subteorias finitas (Cf. [16], p.22, corolário 7). Por outro lado, se α não é axioma, então $P \vdash \neg A(\ulcorner \alpha \urcorner)$. Pela regra de expansão, $P \vdash \neg A(\ulcorner \alpha \urcorner) \vee \neg CON(P|\ulcorner \alpha \urcorner)$. Portanto, $P \vdash \neg A^*(\ulcorner \alpha \urcorner)$.

Agora, podemos definir $B^*(x)$ a partir de $A^*(x)$ do mesmo modo que a fórmula de demonstrabilidade $B(x)$ é definida a partir de $A(x)$, e também a frase de consistência modificada $\neg B^*(\ulcorner \perp \urcorner)$, denotada por $CON^*(P)$. O teorema mencionado demonstra que (i) $A^*(x)$ representa os axiomas de P em P, como vimos; e (ii) $P \vdash CON^*(P)$. Portanto, P *deduz* uma frase de consistência particular. Isto não contradiz o teorema de Gödel, pois o que está implícito no fato que P demonstra a consistência de suas partes finitas é que estas partes finitas devem ser dadas na metamatemática, portanto, somente a partes finitas *standards* de P.

Finalmente, à luz destes sobreavisos, ressaltamos que o segundo teorema de Gödel se mantém presente como uma limitação de demonstrações de consistência, pois uma demonstração de consistência na metamatemática não pode ser formalizada dentro do sistema.

Capítulo 3

Análise de Demonstrações de Consistência

Nós concluímos que é razoável perder a esperança em encontrar uma demonstração de consistência finitária para P. Isto não significa, entretanto, que deveríamos ficar satisfeitos com a demonstração de consistência utilizando o modelo *standard*. O principal problema com esta demonstração não é que ela é não-finitária, mas que é tão 'não-informativa'. Há uma segunda razão para continuar procurando por uma demonstração de consistência para P. Uma demonstração finitária tem dois componentes: lida com objetos concretos, e o faz de forma construtiva. Agora, nós podemos esperar encontrar uma demonstração de consistência que lida com objetos abstratos, mas é ainda construtiva.[1]

[1]Tradução nossa do original: *We conclude that it is reasonable to give up hope of finding a finitary consistency proof for P. This does not mean, however, that we should be satisfied with the consistency proof by means of the standard model. The main trouble with this proof is not that it is nonfinitary, but that it is so uninformative. (...) There is a second reason for continuing to look for a consistency proof for P. A finitary proof has two features: it deals with concrete objects, and it does so in a constructive fashion. Now we can hope to find a consistency proof which deals with abstract objects, but is still constructive* [19, p. 214].

3.1 Um exemplo: A Demonstração da Consistência da Lógica de Primeira Ordem

Como discutido nos capítulos anteriores, o problema da consistência se coloca principalmente a partir do programa de Hilbert e é delimitado no escopo dos sistemas formais. Demonstrar a consistência de um sistema formal para uma teoria clássica é demonstrar que nem toda fórmula do sistema é dedutível no sistema. Para introduzir nosso estudo de demonstrações de consistência, convém primeiro analisar um exemplo simples: a prova da consistência da lógica de primeira ordem.

Considere M um sistema dedutivo para a lógica clássica de primeira ordem sem igualdade com linguagem L, tal como apresentada na seção 1.1.1. É possível demonstrar finitariamente que M é consistente, ou seja que alguma fórmula não é dedutível em M. Para entender a ideia da demonstração basta observar que as fórmulas dedutíveis em M são válidas em todas as estruturas não-vazias para L, também chamadas L-estruturas. Em particular, as fórmulas dedutíveis em M são válidas nas L-estruturas com um único indivíduo no domínio, e a validade de uma fórmula em todas as L-estruturas com um único indivíduo no domínio pode ser caracterizada como uma propriedade finitária.

Como uma contradição não pode ser válida em uma estrutura qualquer, não pode ser teorema de M. O ponto interessante é que a ideia de validade em uma estrutura com único indivíduo pode ser caracterizada na metamatemática finitária; portanto, podemos dispensar os elementos ideais, nesse caso a noção semântica de validade em estruturas, e desenvolver a demonstração segundo os preceitos formalistas. Em resumo, considere b uma constante nova para L e para toda fórmula A de L, seja A^* a fórmula obtida a partir de A omitindo todos os quantificadores e substituindo todas as variáveis pelo símbolo de constante b. Por indução nos teoremas, temos que se A é teorema então A^* é uma tautologia. Como $B^* \wedge \neg B^*$ é $(B \wedge \neg B)^*$ e $B^* \wedge \neg B^*$ não é uma tautologia, então $B \wedge \neg B$ não é teorema. Vejamos como essa ideia pode ser transformada em uma demonstração.

Teorema 7. *Seja A uma fórmula qualquer e b uma constante nova, e seja A^* a fórmula obtida a partir de A pela omissão de todos os quantificadores e substituição de todos os termos restantes por b. Se A é dedutível a partir de M, então A^* é uma tautologia.*

Demonstração. Se A é dedutível em M, então A é um axioma do tipo $B_x[a] \to \exists x B$, ou é consequência tautológica de fórmulas dedutíveis, ou é do tipo $\exists x B \to C$, em que x não ocorre livre em C e $B \to C$ é dedutível. Podemos demonstrar por indução que A^* é uma tautologia em qualquer dos três casos acima.

Primeiro, o passo base. Se A é um axioma do tipo $B_x[a] \to \exists x B$, então A^* é $B^* \to B^*$, e isso é uma tautologia. Agora o passo indutivo. Se A é consequência tautológica de fórmulas dedutíveis B_1, ..., B_n, então A^* é consequência tautológica de B_1^*, ..., B_n^*. Por hipótese de indução, B_1^*, ..., B_n^* são tautologias, de onde segue que A^* é tautologia. Por outro lado, suponha que A é $\exists x B \to C$, em que x não ocorre livre em C e $B \to C$ é dedutível. Nesse caso, A^* é $B^* \to C^*$, e é tautologia por hipótese de indução. □

A consistência do sistema M é consequência do teorema acima. De fato, a fórmula $B \wedge \neg B$ não é dedutível pois $(B \wedge \neg B)^*$ é $B^* \wedge \neg B^*$, que não é uma tautologia. Temos, portanto, uma demonstração finitária da consistência da lógica de primeira ordem. Vamos analisar a ideia da demonstração em detalhes.

Primeiro, identificamos a propriedade finitária $\mathcal{P}$. Afirmar que A satisfaz $\mathcal{P}$ é afirmar que sua transformada A^* é uma tautologia. Observamos que, assim definida, $\mathcal{P}$ é uma propriedade finitária equivalente à validade em todas as estruturas com um único indivíduo no domínio. Vamos demonstrar, por indução na complexidade de A, que A é satisfeita em qualquer estrutura com um único indivíduo se, e somente se, A^* é uma tautologia, ou seja, verdadeira segundo o método usual das tabelas de verdade para qualquer atribuição de valor de verdade para suas subfórmulas atômicas.

Sejam p_1, ..., p_m símbolos de predicado e $\mathcal{N}$ uma estrutura com um único indivíduo α e que interpreta esses símbolos. Há exatamente duas opções para a interpretação de cada símbolo de predicado p_i, com $1 \leq i \leq m$: Ou a interpretação de p_i é a extensão vazia, ou é a extensão total $\{\langle \alpha, ..., \alpha \rangle\}$, determinada pela aridade de p_i, correspondendo naturalmente à atribuição de falso ou de verdadeiro. Desse modo, a estrutura $\mathcal{N}$ corresponde a uma linha da tabela de verdade para m símbolos proposicionais.

Com isso, para qualquer fórmula A cujos símbolos de predicado estão entre p_1, ..., p_m, temos que A é satisfeita em $\mathcal{N}$ se e somente se A^* é verdadeira na linha da tabela de verdade correspondente a $\mathcal{N}$. Se A é atômica, da forma $p_i(t, u, v, ...)$, então A^* é

$p_i(b, b, b, ...)$. Se a interpretação de p_i é a extensão total, então, como b e $t, u, v, ...$ denotam α, tanto A quanto A^* são satisfeitas em $\mathcal{N}$ e A^* é verdadeira na linha correspondente. Se a interpretação de p_i é a extensão vazia, então A e A^* não são satisfeitas e A^* é falsa na linha correspondente. Se A é $\neg B$ ou é $B \vee C$, então A^* é $\neg B^*$ ou é $B^* \vee C^*$ e o resultado segue da hipótese de indução nesses casos. Finalmente, se A é $\exists x B$, então A^* é B^*. Agora, A é satisfeita em $\mathcal{N}$ com seus termos denotando α se e somente se B é satisfeita em $\mathcal{N}$ quando seus termos denotam α. Por hipótese de indução, B é satisfeita em $\mathcal{N}$ quando seus termos denotam α se e somente se B^* é verdadeira na linha correspondente a $\mathcal{N}$, e o resultado segue do fato que A^* é B^*.

Concluímos, a partir do parágrafo acima, que A é válida em todas as estruturas apropriadas com um único indivíduo se e somente se A^* é uma tautologia. Tal fato não é usado na demonstração de consistência, mas explica de onde surge a ideia subjacente. É importante entender por que usamos a propriedade $\mathcal{P}$, "a transformada é uma tautologia", no lugar da propriedade "ser válida nas estruturas com um único indivíduo". Acontece que a noção geral de validade em estruturas não é finitária, por exemplo, a cláusula sobre a interpretação da quantificação existencial em uma estrutura não é finitária. Por isso, precisamos primeiro eliminar o elemento infinitário, a interpretação da quantificação, para apresentar a propriedade $\mathcal{P}$ no âmbito finitário. Sem a eliminação dos quantificadores isso não seria possível. Argumentamos que trata-se de um padrão: é necessário eliminar a quantificação para realizar as etapas de uma demonstração construtiva de consistência.

3.2 Considerações Gerais

Já no exemplo acima é possível identificar um padrão que reaparece nas diversas demonstrações de consistência. Como resume Kleene:

> Todas essas demonstrações de consistência dependem da disponibilidade de um modelo para os axiomas, assim como aquelas dadas antes do advento da teoria de Hilbert da demonstração. Mas dar um modelo para os axiomas em termos de uma aritmética intuitiva não estabelece, além de toda dúvida, que nenhuma contradição pode surgir na teoria que é deduzida a partir dos axiomas, a não ser que possa também ser demonstrado que os argumentos

na teoria possam ser traduzidos em argumentos aritméticos intuitivos nos termos dos objetos usados o modelo.[2]

Podemos destacar quatro etapas que constituem um esquema geral para entender demonstrações de consistência, sendo condição suficiente para tais demonstrações. Enumeramos abaixo essas quatro etapas, explicadas uma a uma a seguir.

1. Uma propriedade $\mathcal{P}$ de fórmulas do sistema é escolhida.

2. Uma classe Δ de fórmulas do sistema é determinada.

3. A correção, com relação a $\mathcal{P}$, das fórmulas em Δ que são dedutíveis, é estabelecida.

4. Uma fórmula em Δ, que não satisfaz $\mathcal{P}$, é determinada.

A propriedade $\mathcal{P}$ de fórmulas do sistema deve ser escolhida criteriosamente, o sucesso das etapas seguintes dependem de uma escolha apropriada no início. As escolhas apropriadas de $\mathcal{P}$ são, em geral, tais que se A é uma fórmula do sistema, então $\mathcal{P}(A)$ diz que A é o caso segundo uma interpretação definida. Nas demonstrações modelo-teóricas de consistência $\mathcal{P}(A)$ diz que A é válida em uma estrutura determinada. De forma similar, nas demonstrações construtivas partimos de um entendimento semântico, no entanto buscamos extrair uma propriedade construtiva desse entendimento.

As segunda e terceira etapas tem por finalidade isolar uma classe Δ de fórmulas e tal que toda fórmula em Δ que é dedutível no sistema cuja consistência está em estudo, satisfaz $\mathcal{P}$. A classe Δ não precisa ser a classe de todas as fórmulas do sistema, mas precisa conter alguma fórmula para que a última etapa seja possível. Considerar uma classe restrita facilita a escolha da propriedade, pois é mais difícil ter a caracterização finitária de $\mathcal{P}$ se estamos considerando todas as fórmulas.

Na etapa final determina-se uma fórmula em Δ que não satisfaz $\mathcal{P}$. Pela etapa anterior, tal fórmula também não é dedutível e, portanto, o sistema é consistente. Assim, o núcleo de uma demonstração construtiva de consistência começa com uma

[2]Tradução nossa do original: *These consistency proofs all depend on having a model for the axioms, as did those given before the advent of Hilbert's proof theory. But giving a model for the axioms in intuitive arithmetical terms does not establish beyond all doubt that no contradiction can arise in the theory deduced from the axioms, unless it can also be demonstrated that the reasonings in the theory can be translated into intuitive arithmetical reasonings in terms of the objects used in the model* [14, p.475].

propriedade $\mathcal{P}$ que seja construtiva para depois estabelecer construtivamente a correção com relação a $\mathcal{P}$.

Uma demonstração construtiva de consistência de um sistema M que segue as quatro etapas listadas deve apresentar uma construção que mostra como a propriedade $\mathcal{P}$ se aplica às fórmulas dedutíveis em M que estão na classe Δ. Além disso, uma tal demonstração deve mostrar uma fórmula em Δ para a qual a propriedade construtiva $\mathcal{P}$ não se aplica. Como já foi dito, a escolha de uma propriedade $\mathcal{P}$ adequada para essa construção demanda um entendimento construtivo da semântica de M com as fórmulas dedutíveis em M que estão na classe Δ, ou seja, um entendimento de que tipo de propriedade construtiva se aplica a elas.

Uma vez tendo este esquema, podemos analisar as demonstrações conhecidas de consistência da aritmética e extrair informações sobre os sistemas; em particular, sabemos que todos os teoremas da subclasse Δ tem a propriedade $\mathcal{P}$. Por outro lado, se estamos buscando uma nova demonstração finitária de consistência, sabemos os passos que devemos seguir.

3.3 A Consistência da Aritmética de Primeira Ordem

As etapas das demonstrações de consistência que analisaremos a seguir também são articuladas a partir de uma noção de validade. Tal noção deve por um lado ser adequadamente restrita para admitir uma caracterização finitária ou pelo menos construtiva, e por outro lado ampla o suficiente para acomodar a correção de uma classe apropriada de fórmulas.

Vamos começar analisando a demonstração da consistência de um sistema para a aritmética de Robinson, como o sistema Q apresentado no primeiro capítulo. Trata-se de uma teoria que pode ser transformada facilmente em uma teoria aberta, ou seja, tal que os axiomas não-lógicos são livres de quantificadores, como apresentamos na seção 1.1.1. Considere o seguinte teorema, encontrado em [6, p.45]:

> *Primeiro Teorema Epsílon:* Sejam A uma fórmula sem quantificadorese Γ um estoque de fórmulas sem quantificadores fechado por substituição de pronomes. A fórmula A é dedutível a partir de Γ (no sistema original) se e

somente se A é consequência tautológica de Γ.[3]

Nesse caso, como consequência do primeiro teorema epsilon, se uma fórmula A livre de quantificadores é dedutível em Q então A é consequência tautológica de instâncias de axiomas também livres de quantificadores de Q. A partir desse resultado, uma demonstração finitária da consistência de Q pode ser obtida e inserida nas quatro etapas do nosso esquema.

Primeiro, considere $\mathcal{P}$ a propriedade de validade finitária definida como: Uma fórmula A é finitariamente válida se, e somente se, o valor de verdade de qualquer instância fechada de A é computável e verdadeiro. Dizemos que o valor de verdade de qualquer instância fechada de A é computável e verdadeiro quando o procedimento uniforme que calcula o valor de verdade de uma dada instância de A segundo as tabelas de verdade para os conectivos lógicos e os algoritmos para sucessor, soma, produto, relação de igualdade dá como resultado o valor verdadeiro. Observamos que os axiomas abertos de Q, o que inclui os axiomas não-lógicos e os axiomas da igualdade, são finitariamente válidos.

Segundo, seja Δ a classe das fórmulas abertas, ou seja, livres de quantificadores. Como vimos acima, se uma fórmula A em Δ é dedutível em Q, então A é consequência tautológica de instâncias de axiomas abertos de Q. Mas uma consequência tautológica de fórmulas finitariamente válidas é também finitariamente válida. As instância dos axiomas abertos de Q são finitariamente válidas, e disso segue que as fórmulas abertas dedutíveis em Q são todas finitariamente válidas. Ou seja, que vale a correção com relação a $\mathcal{P}$ das fórmulas em Δ que são dedutíveis em Q. Finalmente, a fórmula aberta $\neg x = x$ não é finitariamente válida, portanto não é dedutível em Q, o que mostra sua consistência.

A demonstração acima tem dois pontos cruciais. O primeiro é que há um procedimento uniforme, com base nas tabelas de verdade e nos algoritmos para as operações e relações aritméticas básicas, para calcular o valor de verdade de qualquer frase livre de quantificadores escrita na linguagem de Q. O segundo é o uso do primeiro teorema epsilon, que estabelece a correção com relação a $\mathcal{P}$ das fórmulas em Δ que são dedutíveis em Q. A demonstração deste teorema é a parte mais difícil, que consiste em

[3]Para mais detalhes veja a terceira seção do verbete https://plato.stanford.edu/entries/epsilon-calculus/.

eliminar quantificadores. Notamos que a possibilidade de eliminar a quantificação é o elemento comum de ambos os pontos, sem o qual não alcançaríamos a propriedade de validade finitária ou a correção.

Passemos ao caso da aritmética de Peano, o sistema P apresentado no primeiro capítulo. Como o axioma esquema da indução não é livre de quantificadores, os axiomas de P não são finitariamente válidos no sentido acima. Para demonstrar a consistência de P é preciso apresentar uma propriedade $\mathcal{P}$, demonstrar a correção com relação a $\mathcal{P}$ das fórmulas em uma classe Δ dedutíveis em P, e encontrar uma fórmula em Δ que não satisfaz $\mathcal{P}$. Para uma demonstração finitária, a propriedade $\mathcal{P}$ deveria ser finitária, assim como a demonstração da correção das fórmulas em Δ dedutíveis e da incorreção de alguma fórmula em Δ. Como vimos, o segundo teorema de Gödel da incompletude faz parecer duvidoso que isso seja possível.

Contudo, há demonstrações de consistência da aritmética de primeira ordem com indução que vão pouco além do finitário. A mais conhecida é devida a Gentzen, mas o próprio Gödel produziu uma demonstração assim, e vamos analisar uma variante da demonstração de Gödel da consistência de P devida a Shoenfield, que apresenta uma interpretação do sistema P para a aritmética com indução diretamente em uma teoria de funcionais recursivos de tipo finito.[4]

A linguagem da teoria não tem quantificadores, mas tem uma quantidade enumerável de tipos, e estoques de variáveis para cada um desses tipos. A definição dos termos e constantes (símbolos para funcionais) é indutiva, de forma a dar esquemas de introdução de constantes a partir das constantes básicas 0 e S (intencionalmente "zero" e "sucessor") e da descrição dos tipos. Além de esquemas puramente combinatórios, há um esquema de introdução de símbolos para funcionais por recursão. As fórmulas atômicas são equações apenas entre termos de tipo o, que intencionalmente se referem a números. As demais fórmulas são obtidas por negações e disjunções apenas.

A interpretação de P é então definida associando para cada fórmula A do sistema uma fórmula transformada A^* do tipo $\forall\overline{x}\exists\overline{y}\phi$, em que ϕ é uma fórmula da teoria descrita acima e $\overline{x}$ e $\overline{y}$ são sequências de variáveis. Exatamente como no caso da demonstração da consistência da lógica de primeira ordem, uma fórmula A e sua transformada A^* possuem o mesmo significado pretendido, o que não é usado na de-

[4]Vamos apresentar apenas um breve esboço da teoria de funcionais e da demonstração de consistência suficiente para nossos propósitos. A demonstração completa pode ser encontrada em [19, p.214-222].

monstração. No próximo passo, um teorema de correção é demonstrado relacionando a demonstrabilidade de A com a validade da respectiva fórmula transformada A^* na teoria dos funcionais. A demonstração do teorema de correção é construtiva, e dele segue o resultado de consistência.

O único elemento não-finitário da demonstração de Gödel da consistência de P é a noção de validade da teoria dos funcionais. Mas essa noção não está tão distante do finitário quanto, por exemplo, a noção de validade padrão da aritmética de primeira ordem, esta sim fortemente não-finitária. O motivo para isso é que não há fórmulas quantificadas na teoria dos funcionais, portanto a noção de validade associada não inclui cláusulas para quantificadores. Na verdade, a única cláusula relevante é aquela que corresponde às fórmulas atômicas, equações entre termos de tipo o. A semântica dessas equações não é finitária porque símbolos para funcionais de tipo superior podem ocorrer nos termos de tipo o, o que torna a interpretação do termo geral de tipo o não-finitária. Tal elemento semântico está presente na demonstração de consistência e parece que não pode ser removido.

Por outro lado, as relações entre funcionais recursivos de tipo finito parecem suficientemente determinadas e, como a semântica do termo geral de tipo o não vai muito além do âmbito finitário, a consistência de P baseada na demonstração com teoria dos funcionais é plausível. Com efeito, como Bernays escreve para Gödel, a interpretação de cada termo específico de tipo o é finitária, o problema é a semântica do termo geral, pois o número de computações que devemos efetuar para interpretar cada termo depende deste:

> Estas recursões encaixadas ... aparecem para mim como finitas no mesmo sentido que recursões primitvas, i.e., se vemos elas como enunciados de procedimentos computacionais, onde podemos reconhecer que a função definida pelo respectivo processo satisfaz as equações de recursão (para toda sequência de valores númericos para os argumentos). De fato, a computação do valor de uma função de acordo com a recursão encaixada, quando os valores numéricos dos argumentos são dados, se reduz à aplicação de várias recursões primitivas, o número das quais é determinado por um argumento numérico.[5]

[5]Tradução nossa do original: *These nested recursions ... appear to me to be finite in the same sense as the*

A demonstração que acabamos de descrever é facilmente colocada no esquema geral de demonstrações de consistência. Primeiro, dizemos que uma fórmula A de P tem a propriedade $\mathcal{P}$ se a fórmula A^* correspondente, que é do tipo $\forall\overline{x}\exists\overline{y}\phi$, é válida no sentido que há um procedimento finitário e uniforme que produz termos $\overline{y}$ a partir de termos $\overline{x}$ de modo que a instância associada de ϕ seja válida no sentido da teoria dos funcionais. Depois, tomando como Δ o conjunto de todas as fórmula, demonstramos finitariamente a correção com relação à $\mathcal{P}$ de todas as fórmulas dedutíveis. Por fim, demonstramos que a fórmula $\neg 0 = 0$ não possui a propriedade $\mathcal{P}$. De todas essas etapas, apenas a definição da propriedade $\mathcal{P}$ apresenta algum elemento não-finitário.

Podemos dizer que essa demonstração é construtiva apesar de não ser estritamente finitária, como colocado por Shoenfield na citação inicial do capítulo. Novamente, temos aqui dois pontos cruciais. O primeiro é o estabelecimento da teoria dos funcionais e da noção de validade nessa teoria, a partir da qual a propriedade $\mathcal{P}$ é definida. O segundo é demonstrar a correção com relação a $\mathcal{P}$ das fórmulas que são dedutíveis em P. Para isto é preciso mostrar, com um procedimento finitário e uniforme, como produzir para toda fórmula dedutível A termos apropriados a partir de termos dados, de modo que a instância associada da matriz da fórmula transformada A^* seja válida no sentido da teoria dos funcionais. Notamos também que a eliminação da quantificação está presente em cada parte da demonstração pois sem isso não alcançaríamos a propriedade "quase-finitária" $\mathcal{P}$ ou a correção.

A partir de nossa análise podemos destacar como elemento comum nas demonstrações de consistência tanto a eliminação de quantificadores como a observação que a propriedade $\mathcal{P}$ é derivada de uma semântica padrão. Os dois pontos estão relacionados e não sem razão. Uma vez que uma demonstração de consistência é obtida a partir da correção de algumas fórmulas dedutíveis com relação a $\mathcal{P}$, é natural derivar a propriedade $\mathcal{P}$ de uma semântica padrão para a qual já temos correção. Contudo a principal componente não-finitária de uma semântica padrão é a cláusula correspondente à quantificação. Portanto, para derivar de uma semântica padrão uma propriedade $\mathcal{P}$ que seja pelo menos próxima do âmbito finitário, é preciso eliminar

primitive recursions, i.e., if one regards them as statements of computation procedures where one can recognize that the function defined by the respective process satisfies the recursion equations (for every system of numerical values for the arguments). Indeed, the computation of the value of a function according to a nested recursion, when the numerical values of the arguments are given, comes down to the application of several primitive recursions, the number of which is determined by a numerical argument. (Trecho de carta de Bernays para Gödel, citada em [23, p.7].

quantificadores. No caso de P isso aparentemente não pode ser feito sem custo e a quantificação é substituída por algo ainda não-finitário, como os funcionais de tipo superior na demonstração analisada.

É razoável que o interesse na busca por demonstrações construtivas de consistência para sistemas como P persista apesar do segundo teorema da incompletude de Gödel, que impede demonstrações de consistência que sejam formalizáveis em tais sistemas. A análise dos casos acima mostra que eliminar quantificadores substituindo-os por algo cuja interpretação seja mais próxima do finitário é parte importante da estratégia de demonstração de consistência dentro do quadro delimitado por Gödel. As etapas do esquema geral proposto são cumpridas construtivamente apenas após alguma eliminação de quantificadores. Isso ajuda a explicar a dificuldade de demonstrar construtivamente a consistência de um sistema como ZFC, para o qual parece muito difícil substituir a quantificação por algo mais próximo do finitário e mais facilmente interpretado. No entanto, o esforço para avançar nas demonstrações construtivas de consistência frequentemente leva a um melhor entendimento sobre a estrutura quantificacional do sistema e sua interpretação.

Ainda, observamos que tais demonstrações, além do seu interesse fundacional, enriquecem a disciplina da lógica matemática enquanto método para atacar problemas matemáticos, tendo como fruto a área conhecida como teoria da demonstração. Como corolário da demonstração de consistência de P e da demonstração do Teorema de Herbrand temos, por exemplo, um resultado devido a Kreisel que estabelece que para bloquear potenciais contra-exemplos para uma fórmula fechada em forma normal prenexa que é dedutível em P basta considerar os funcionais recursivos. Esse resultado já foi usado para extrair informação construtiva de demonstrações matemáticas não-construtivas. Os avanços desta área podem ser encontrados em [15].

Capítulo 4

Repensando a Concepção Axiomática

> É este teorema [segundo teorema da incompletude] que torna a incompletabilidade da matemática particularmente evidente. Pois, ele torna impossível que alguém apresente um certo sistema bem definido de axiomas e regras e consistentemente faça a seguinte asserção sobre ele: todos estes axiomas e regras que percebo (com certeza matemática) serem corretos, e ainda mais, eu acredito que ele contém toda a matemática. Se alguém faz tal asserção, contradiz a si próprio. Pois se ele percebe os axiomas sobre consideração como sendo corretos, ele também percebe (com a mesma certeza) que eles são consistente. Então ele tem um *insight* matemático não derivável dos seus axiomas.[1]

[1]Tradução nossa do original: *It is this theorem which makes the incompletability of mathematics particularly evident. For, it makes it impossible that someone should set up a certain well-defined system of axioms and rules and consistently make the following assertion about it: All of these axioms and rules I perceive (with mathematical certitude) to be correct, and moreover I believe that they contain all of mathematics. If somebody makes such a statement he contradicts himself. For if he perceives the axioms under consideration to be correct, he also perceives (with the same certainty) that they are consistent. Hence he has a mathematical insight not derivable from his axioms* [9, p. 309].

Podemos considerar a relação entre consistência e verdade na aritmética sob o prisma do estudo de casos acima. Em linhas gerais, dizemos de uma frase declarativa que ela é verdadeira com relação a um padrão de correção se uma concordância entre a frase e o padrão é obtida. Caso contrário, dizemos que a frase é falsa com relação ao padrão de correção instituído. Nesse sentido, um discurso sobre verdade de frases da aritmética deve vir acompanhado de uma elucidação dos elementos centrais em torno dos quais esta concepção geral se articula. Logo, antes de falar em verdades aritméticas precisamos explicar o que é uma frase (declarativa), que tipo de coisa é um padrão de correção, como um padrão é instituído e em que consiste a relação de concordância entre frase e padrão.

De um modo geral, o problema de definir precisamente as frases de uma teoria matemática não oferece grande dificuldade. É muito mais difícil explicar satisfatoriamente que tipo de coisa é um padrão de correção em uma teoria matemática, como ele é instituído e em que consiste a relação de concordância entre frase e padrão. Uma primeira tentativa seria a concepção de verdade como validade em uma classe de estruturas: Um padrão de correção em uma teoria matemática é uma classe de estruturas formada pelos modelos padrão da teoria; esse padrão é instituído pela intenção do matemático de falar dessas estruturas ao formular sua teoria, e uma frase concorda com esse padrão se é satisfeita em todas as estruturas da classe.

Um esclarecimento deve ser feito sobre o que entendemos por estrutura, no nosso caso, estruturas da aritmética de primeira ordem. Uma tal estrutura é constituída por um domínio qualquer de indivíduos, uma relação binária (nesse domínio) que interpreta o símbolo de igualdade $=$, um indivíduo que interpreta o símbolo 0 e duas operações binárias que interpretam os símbolos $+$, $\cdot$, para adição e multiplicação. Reforçamos que não há restrição adicional para os dados de uma estrutura, ou seja, o domínio, a relação binária e as operações. É usual pedir que o número de indivíduos no domínio seja maior que zero e que a relação que interpreta igualdade seja a relação de identidade no domínio, mas mesmo esses requerimentos podem ser dispensados. Claro que nem todas as estruturas são modelos padrão intencionados.

Dado o esclarecimento, ao retornar à tentativa, observamos os seguintes problemas. Não é claro que ao formular uma teoria a intenção do matemático de se dirigir aos modelos padrão é suficiente, ainda que esses modelos sejam entendidos por meio de uma metateoria. Não basta ter uma intenção para garantir que as frases da teoria adquiram um sentido específico. Estruturas que servem de base para a interpretação da linguagem são usualmente entendidas através de uma teoria matemática. Nesse caso, o entendimento proposto sobre verdade de frases em uma teoria matemática só poderia ser dado em uma outra teoria matemática, uma metateoria, capaz de definir tanto as fórmulas da teoria objeto quanto as estruturas apropriadas. Um discurso sobre verdade de frases aritméticas acaba por ser realizado em uma metateoria, portanto mediado por outra teoria matemática. Tal mediação é indesejada pois a aritmética é uma teoria matemática básica e parece natural que possamos entender sua verdade sem ter que recorrer à outra teoria.

Se tentamos resolver esse problema supondo que o entendimento de modelos padrão intencionados prescinde de uma metateoria, então a situação se agrava por outro lado. Pois teríamos agora dois tipos de entendimento dos modelos padrão, um mediado pela metateoria e outro direto. E assim, ou esse entendimento direto dos modelos padrão concorda com as representações teóricas destes, ou o conhecimento matemático sobre os modelos padrão estaria errado. Como a segunda alternativa não é admissível se temos como hipótese que o conhecimento matemático sobre os modelos não pode estar errado, temos que nos comprometer com a concordância entre o entendimento direto de modelos e o entendimento por meio de uma metateoria. Mas tal comprometimento parece inadequado e poderia trazer consequências posteriores, portanto preferimos buscar outra alternativa.

Portanto, vamos trabalhar em detalhes uma proposta alternativa de concepção axiomática da aritmética. A finalidade dessa nova proposta é eliminar a referência à classe de modelos padrão preservando o ideal almejado. Uma teoria matemática, segundo discutido acima, *dirige-se*, através da intenção do matemático, à classe de modelos padrão, almejando, com isso, alcançar exatamente as frases satisfeitas em todos os modelos padrão. A chave para a formulação da nova proposta é o entendimento de que essa *direção* que a teoria possui, ou seja, a noção que a teoria almeja alcançar as frases satisfeitas em todos os modelos padrão, pode (*i*) ser caracterizada sem referência à classe de modelos padrão e (*ii*) desempenhar o papel de padrão de correção. Se esse for o caso, então os problemas mencionados acima não atingem a nova proposta, enquanto os méritos da concepção de verdade como validade em uma classe de estruturas são mantidos.

Há um problema sério com a tese segundo a qual uma classe de modelos padrão tem prioridade sobre o critério objetivo de seleção de estruturas correspondentes. Essa tese toma por base que pelo menos uma classe de modelos padrão de uma teoria matemática está determinada em primeiro lugar, e, que a axiomatização da teoria é uma articulação subordinada aos modelos padrão e que é obtida na tentativa de descrevê-los. Isso pode ser plausível para algumas teorias como, por exemplo, a aritmética, em que há uma representação simples e precisa dos indivíduos, predicados e operações de um modelo padrão. Contudo, o mesmo não ocorre para outras teoria, como a teoria de conjuntos. Não há representação simples, que não assuma de antemão a própria teoria de conjuntos e que determina exaustivamente um modelo dessa teoria, nem é o caso que uma classe de modelos padrão da teoria de conjuntos está determinada (em uma metateoria) e antecede sua axiomatização. Como acreditamos ser importante alcançar um entendimento da noção de verdade que seja uniforme para as teorias matemáticas, esse problema deve ser levado em consideração aqui.

Partimos, então, da ideia que se uma teoria matemática dirige-se a uma classe de modelos padrão, então essa direção que a teoria possui pode (*i*) ser caracterizada sem referência à classe de modelos padrão e (*ii*) desempenhar o papel de padrão de correção. A propriedade (*i*) pode ser entendida do seguinte modo: Cada classe de modelos padrão é caracterizada por um critério objetivo de seleção de estruturas que pode ser formulado como uma lista de princípios, os *princípios diretivos* correspondentes à classe dada. Ou seja, cada classe de modelos padrão pode ser vista como a classe das estruturas que estão em conformidade com um critério correspondente. Contudo, essa formulação sugere que a classe de modelos padrão continua desempenhando o papel principal, enquanto os princípios diretivos são secundários. Nós vamos inverter a ordem de prioridade, dando aos princípios diretivos o papel principal. Assim não é preciso se comprometer ontologicamente com a classe de modelos padrão para apresentar o critério que deveria ser satisfeito por cada um deles, pois não precisamos de modelos padrão para prescrever o que seria um.

Consideramos, portanto, que uma lista de princípios diretivos tem prioridade sobre a classe de modelos padrão correspondente, e a formalização de uma teoria matemática deve ser guiada por tal lista. Um padrão de correção primário para uma teoria matemática é a lista de princípios diretivos correspondente, a partir da qual os axiomas da teoria são justificados, e a classe de modelos padrão correspondente deve ser entendida como um padrão de correção secundário e apenas na medida que representa os princípios. Esse padrão é instituído na prática histórica da matemática, na medida em que os princípios são adotados, implícita ou explicitamente, e regem essa prática. O matemático Ernst Zermelo, ao apresentar uma formalização para a teoria de conjuntos parece também entender que esta formalização deve partir de uma concepção histórica e não se limitar a uma definição do objeto desta teoria, como vemos nessa citação:

> A definição original de Cantor de um conjunto (1895) como "uma coleção, aglomerada em um todo, de certos objetos bem distinguidos em nossa percepção ou nosso pensamento"portanto requer uma restrição; no entanto, não foi ainda substituída com êxito por uma que seja tão simples e não demande tais precauções. Sob estas circunstâncias não nos resta nada a fazer neste ponto senão prosseguir em direção oposta e, partindo da teoria de conjuntos como é historicamente dada, buscar os princípios requeridos para implementar a fundamentação desta disciplina matemática.[2]

Vamos apresentar agora uma lista de princípios diretivos para a aritmética e, em seguida, uma explicação do papel da mesma na aritmética. Essa lista de princípios constitui uma direção a ser seguida pela teoria. Podemos dizer que a prática da aritmética está sujeita à adoção de princípios diretivos instituídos historicamente, como aqueles apresentados aqui, e que essa prática regida por princípios antecede a axiomatização.

1. Cada número é denotado por um único numeral, sendo este um objeto sintático obtido pela repetição, possivelmente nula, de um símbolo primitivo. Cada numeral denota um único número e o número zero é denotado pelo numeral nulo.

[2]Tradução nossa do original: *Cantor's original definition of a set (1895) as "a collection, gathered into a whole, of certain well-distinguished objects of our perception or our thought" therefore certainly requires some restriction; it has not, however, been successfully replaced by one that is just as simple and does not give rise to such reservations. Under these circumstances there is at this point nothing left for us to do but to proceed in the opposite direction and, starting from set theory as it is historically given, to seek out the principles required for establishing the foundations of this mathematical discipline* [26, p.200].

2. Dados dois numerais s e t, a adição dos números denotados por s e t é denotada pelo numeral obtido pela repetição do símbolo primitivo determinada pela concatenação de t e s.

3. Dados dois numerais s e t, a multiplicação dos números denotados por s e t é denotado pelo numeral obtido pela repetição de s determinada por t, ou seja, por uma repetição de s para cada ocorrência do símbolo primitivo em t.

A lista de princípios acima definitivamente não é uma descrição de um modelo padrão dos "números verdadeiros"; ela apenas prescreve a direção seguida pela aritmética, ou seja, o que essa teorização almeja descrever. Esta lista prescreve o que um domínio qualquer de objetos com operações deve obrigatoriamente satisfazer para poder ser considerado um modelo padrão da aritmética, uma estrutura que a aritmética almeja descrever. É importante ressaltar que não faz sentido falar em valor de verdade do critério prescrito por essa lista de princípios uma vez que esta lista não desempenha função descritiva para ser verdadeira ou falsa. Podemos apenas dizer que os princípios diretivos foram instituídos historicamente pela relevância que a investigação na direção apontada apresenta, e que, uma vez instituídos, prescrevem objetivamente a direção da aritmética.

Os axiomas da aritmética devem ser escolhidos de forma que o sistema dedutivo resultante seja uma aproximação, tão boa quanto possível, das frases verdadeiras de acordo com o padrão de correção dado pelos princípios diretivos. A intenção de satisfazer tal aproximação resulta em uma escolha de um sistema dedutivo que seja um correlato formal da lista de princípios. Acreditamos que este é o modo pelo qual chegamos aos axiomas do sistema dedutivo P, mesmo que implicitamente. Para o caso do axioma esquema da indução é válida uma explicação adicional: esse axioma é obtido a partir do primeiro princípio, na tentativa de descrever uma situação em que os números são todos denotados por numerais.

A lista de princípios não constitui um âmbito externo à aritmética, e sim faz parte da aritmética enquanto sistema teórico interpretado. A aritmética, assim compreendida, é constituída por duas camadas: a camada do critério caracterizada pela lista de princípios, em que é dada a direção da teoria, e a camada dos sistemas formais para a aritmética, que deve estar em concordância com os princípios e que constitui o âmbito dedutivo associado. Uma frase formal da aritmética se encontra na segunda camada definida acima, e dizemos que ela é verdadeira se descreve corretamente a direção prescrita pelos princípios dados na primeira camada. Essa noção de verdade aritmética pode ser analisada matematicamente, e o resultado da análise matemática corresponde com o esperado. Para um tratamento mais técnico e abrangente desta proposta veja [5] e [7]. Para as consequências da adoção de uma tal concepção de verdade e sua comparação com outras concepções veja [1].

Conclusão

Um fato relevante sobre a concepção axiomática que sugerimos é que a noção de verdade nela não implica a consistência dos sistemas formais correspondentes. Mesmo que para alguns sistemas a demonstração de consistência seja plausível, uma concepção de verdade de teorias matemáticas deve ser uniforme, como dissemos anteriormente, e se aplicar igualmente às teorias para as quais não temos tais demonstrações. Se um sistema formal é inconsistente, então, em virtude do mesmo fato, o critério estabelecido pela lista de princípios é necessariamente vazio, e não aponta para direção alguma. Esta abertura com relação à consistência não ocorre com a concepção de verdade como satisfação em uma estrutura padrão que prescinde de uma metateoria, porque se essa estrutura satisfaz os axiomas, então o sistema é necessariamente consistente. Julgamos que essa característica da concepção de verdade é desejável, pois, tendo em vista as limitações para demonstrações de consistência expostas neste trabalho, faz sentido deixar em aberto a possibilidade da inconsistência.

Vários resultados apontam insuficiências da concepção vigente e abrem novos caminhos, e da mesma forma que nos últimos dois séculos, o choque de diferentes imagens de fundamentação colabora para uma mudança da concepção axiomática, aqui também diferentes imagens podem iluminar uma nova perspectiva. Por um lado, a proposta de Gödel para demonstrar a consistência coloca a possibilidade de ampliação do escopo da lógica, através de considerações semânticas, como defende Hintikka[3] ou da ampliação do entendimento de teorias, que abarque uma camada histórico-conceitual. O que vai ao encontro da visão de Hilbert sobre o papel da matemática de cuidar de si, como um ideal de autossuficiência. Este ideal é anterior à cisão da

[3]"A dialética de Gödel foi apresentada acima como um novo modo de definir o conceito modelo-teórico crucial de (simples e material) verdade". Tradução nossa do original: *Godel's Dialectica interpretation was presented above as a new way of defining the crucial model-theoretical concept of (plain material) truth* [12, p. 67].

matemática entre sistemas formais e metamatemática, portanto podemos retomar este ideal sem restringir a matemática ao âmbito puramente formal.

Acreditamos que a conclusão principal desta investigação aponta para que a concepção axiomática de teorias ainda não alcançou uma forma definitiva e deve continuar sendo objeto de investigação e crítica. Os avanços dados pela formalização são significativos, no entanto não está determinado que é por este caminho somente que podemos seguir para a fundamentação da matemática. Também ressaltamos a importância de uma visão filosófica sobre a matemática que abarque o desenvolvimento histórico da disciplina e que não reduza a dimensão conceitual dentro do escopo da prática matemática a uma mera sombra da manipulação simbólica.

Referências Bibliográficas

[1] Almeida, Edgar, Análise de uma Fundamentação da Verdade de Sentenças Aritméticas, Revista de Filosofia Moderna e Contemporânea, vol. 6, n. 2, 2018, p. 57 - 94.

[2] Boolos, George, Burgess, John, Jeffrey, Richard, *Computabilidade e Lógica*, Tradução de Cezar Mortari, São Paulo: Editora Unesp, 2012.

[3] Bourbaki, Nicolas, *Théorie des Ensembles*, Paris: Hermann, 1970.

[4] Euclides, *Os elementos*; tradução e introdução de Irineu Bicudo, São Paulo : Editora UNESP, 2009.

[5] Freire, Rodrigo, Interpretation and Truth in Set Theory, em *Trends in Logic: Vol. 47, Contradictions, from Consistency to Inconsistency*, Berlim: Springer, 2018.

[6] Freire, Rodrigo, *Tópicos em Lógica de Primeira Ordem*, manuscrito não publicado, 2019.

[7] Freire, Rodrigo, Ramos, Luiza, Da Semântica para Demonstrações de Consistência e a Volta, Revista de Filosofia Moderna e Contemporânea, vol. 6, n. 2, 2018, p. 37 - 56.

[8] Gödel, Kurt, *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, New York: Basic Books, 1962.

[9] Gödel, Kurt, *Collected Works: Vol. III*, Oxford, 1995.

[10] Hilbert, David, On the Infinite, em *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, editado por Paul Benacerraf e Hilary Putnam, Segunda Edição, Cambridge University Press, 1983, p. 183 - 201.

[11] Hilbert, David, *Fundamentos da Geometria*, Editada por Augusto José Franco de Oliveira, Lisboa: Gradiva, 2003.

[12] Hintikka, Jaakko, *On Gödel*, Belmont: Wadsworth/Thomson Learning, 2000.

[13] Katz, Victor J., *A History of Mathematics: An Introduction*, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1998.

[14] Kleene, Stephen Cole, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam: North-Holland, 1952.

[15] Kohlenbach, Ulrich, *Applied Proof Theory: Proof Interpretations and their Use in Mathematics*, Berlim: Springer-Verlag, 2008.

[16] Lindström, Per, *Aspects of Incompleteness*, Natick, Massachusetts: A K Peters, 1997.

[17] Péter, Rózsa, *Playing with Infinity*, Londres: G. Bell and sons ltd, 1961.

[18] Raggio, Andres, A Evolução da Noção de Sistema Axiomático, Philósophos - Revista de Filosofia, vol. 8, no. 1, 2003, p. 95 - 119.

[19] Shoenfield, Joseph, *Mathematical Logic*, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1967.

[20] Smorynski, Craig, The Incompleteness Theorems, em *Handbook of Mathematical Logic*, editado por Jon Barwise, Amsterdam: North-Holland, 1977, p. 821 - 865.

[21] Smullyan, Raymond, *First Order Logic*, New York: Springer-Verlag, 1968.

[22] Sterret, Susan G., *Frege and Hilbert on the Foundations of Geometry*, Independent, 2002.

[23] Tait, William, Remarks on finitism, em: *The Provenance of Pure Reason*, Oxford, 2005.

[24] Tarski, Alfred, Mostowski, Andrzej, Robinson, Raphael, *Undecidable Theories*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1953.

[25] Viero, Arno, *Sistemas Axiomáticos Formalizados: A Questão da Desinterpretação e da Formalização da Axiomática*, Campinas: Coleção CLE, 2011.

[26] Zermelo, E. *Untersuschungen über due Grundlagen der Mengenlehre, I*, Mathematische Annalen 65, p. 261-281, 1908 [translated in van Heijenoort 1967, p. 199-215]